Prof. Dr. Vladimir Shikhman
Professur für Wirtschaftsmathematik
Technische Universität Chemnitz

Übung 9 zur Entscheidungstheorie (SS 2017)
Subjective Probabilities

Auf der Potenzmenge der Zustände S sei die Präferenz "wahrscheinlicher als" gegeben, die folgende Axiome erfüllen mag:

F1: $A \succeq \emptyset$ für alle $A \subset S$,

F2: $S \succ \emptyset$,

F3: $\succeq$ ist rational,

F4: Im Falle $A \cap C = B \cap C = \emptyset$ gilt $A \prec B \Leftrightarrow A \cup C \prec B \cup C$,

F5: Für $A \prec B$ existieren paarweise disjunkte Mengen $C_1, \ldots, C_m \subset S$ mit $\bigcup_{i=1}^m C_i = S$ und $A \cup C_i \prec B$ für alle $i = 1, \ldots, m$.

1) Die Präferenz "wahrscheinlicher als" erfülle Axiome F1-F4. Zeigen Sie:

C1: $B \subset C \Rightarrow \emptyset \preceq B \preceq C \preceq S$,

C2: $A \prec B, B \cap C = \emptyset \Rightarrow A \cup C \prec B \cup C$,

C3: $A \prec B, C \prec D, B \cap D = \emptyset \Rightarrow A \cup C \prec B \cup D$,

C4: $A \prec B \Leftrightarrow S \backslash A \succ S \backslash B$.

2) Sei $S = \{s, t, u, v, w\}$ und

$$suv \succ tw \succ stv \succ sw \succ uv \succ tv \succ stu \succ w \succ tu \succ sv \succ v \succ su \succ st \succ u \succ\succ t \succ s \succ \emptyset.$$

Ausserdem gelte $A \prec B$ genau dann, wenn $S \backslash A \succ S \backslash B$. Zeigen Sie, dass Axiome F1-F4 erfüllt sind, aber es kein Wahrscheinlichkeitsmaß p auf S gibt, so dass

$$A \prec B \Leftrightarrow p(A) < p(B).$$

3) Die Präferenz "wahrscheinlicher als" erfülle Axiome F1-F5. Zeigen Sie, dass S unendlich viele Elemente besitzen muss und $A \sim \emptyset$ für alle endlichen Telmengen $A \subset S$. Gilt hier das Axiom F5?

4) Die Präferenz "wahrscheinlicher als" erfülle Axiome F1-F4. Dann ist Axiom F5 zu folgenden beiden Axiomen äquivalent:

(fein) Für alle $A \succ \emptyset$ existieren paarweise disjunkte Mengen $C_1, \ldots, C_m \subset S$, so dass $\bigcup_{i=1}^m C_i = S$ und $C_i \prec A$ für alle $i = 1, \ldots, m$.

(dicht) Für $A \prec B$ existiert $C \subset S$ mit $A \prec A \cup C \prec B$.