Prof. Dr. Vladimir Shikhman
Professur für Wirtschaftsmathematik
Technische Universität Chemnitz

Übung 8 zur Entscheidungstheorie (SS 2017)
Qualitative Beliefs

Sei A die Menge der Alternativen und X der Beobachtungen. Eine Zähler-Abbildung $I : X \to \mathbb{Z}_+$ ist als Datenbank zu interpretieren, falls $\sum_{x \in X} I(x) < \infty$. Präferenzen $\succeq_I$ sind mit der Erfahrung konsistent, falls es eine Gewichtungsfunktion $v : A \times X \to \mathbb{R}$ gibt mit

$$a \succeq_I b \Leftrightarrow \sum_{x \in X} I(x)v(a,x) \geq \sum_{x \in X} I(x)v(b,x) \quad \text{für alle } a, b \in A.$$

1) Eine zufällige Größe nehme bei n unabhängigen Experimenten reelle Werte $X = (x_i)_{i=1}^n$ an. Gegeben sei eine Kerndichte $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, d.h. $k(x) \geq 0$ und $\int k(x)dx = 1$. Man definiere den Kerndichteschätzer

$$f_X(a) := \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n k\left(\frac{a - x_i}{h}\right), \quad h > 0.$$

Der Größenwert a ist wahrscheinlicher als b im Bezug auf Experiment X, falls $f_X(a) \geq f_X(b)$.

(i) Ist f_X eine Dichte?

(ii) Zeigen Sie, dass die Präferenzen mit der Erfahrung konsistent sind.

(iii) Diskutieren Sie den Fall der Gauß-Dichte $k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$. Interpretieren Sie den Bandbreitenparameter h.

2) Eine zufällige Größe habe die Wahrscheinlichkeitsdichte $g^a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit unbekannten Parametern $a \in A$. Sie nimmt bei n unabhängigen Experimenten reelle Werte $X = (x_i)_{i=1}^n$ an. Man definiere die Likelihood-Funktion als

$$g_X(a) := \prod_{i=1}^n g^a(x_i).$$

Die Schätzung des Parameters a ist wahrscheinlicher als b im Bezug auf Experiment X, falls $g_X(a) \geq g_X(b)$.

(i) Interpretieren Sie die Likelihood-Funktion als Produktdichte.

(ii) Zeigen Sie, dass die Präferenzen mit der Erfahrung konsistent sind.

(iii) Schätzen Sie die Parameter μ und σ^2 der Gauß-Dichte $g^{\mu,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$ nach der Maximum-Likelihood-Methode.

3) Ein Entscheider mußte auf den verspäteten Zug in den letzten drei tagen jeweils $3, 10$ und 5 Minuten warten. Er nimmt an, dass die Verspätungszeit Z einer Exponentialverteilung folgt, d.h. $g^\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$, mit dem unbekannten Parameter λ. Schätzen Sie den Parameter λ nach der Maximum-Likelihood-Methode. Wie wahrscheinlich scheint es dem Entscheider, dass er demnächst mindestens 20 Minuten warten wird?