

Prof. Dr. Vladimir Shikhman
Professur für Wirtschaftsmathematik
Technische Universität Chemnitz

Übung 7 zur Entscheidungstheorie (SS 2017) Risk Aversion

Für eine stetige und monoton steigende Nutzenfunktion $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, den Geldbetrag x und die Abweichung ε sei das Wahrscheinlichkeitspremium $\pi(x, \varepsilon, u)$ durch die folgende Gleichung definiert:

$$u(x) = \left[\frac{1}{2} + \pi(x, \varepsilon, u) \right] u(x + \varepsilon) + \left[\frac{1}{2} - \pi(x, \varepsilon, u) \right] u(x - \varepsilon).$$

Falls u zusätzlich differenzierbar ist, definiert man den Arrow-Pratt Koeffizienten der Risikoaversion als

$$r_A(x, u) = -\frac{u''(x)}{u'(x)},$$

und den relativen Arrow-Pratt Koeffizienten der Risikoaversion als

$$r_R(x, u) = -x \frac{u''(x)}{u'(x)}.$$

1) Zeigen Sie: $u(\cdot)$ ist genau dann konkav, wenn das Wahrscheinlichkeitspremium nicht-negativ ist, d.h. $\pi(x, \varepsilon, u) \geq 0$ für alle x und ε .

2) Gegeben seien stetige und monoton steigende Nutzenfunktionen $u_1, u_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(i) es gibt eine monoton steigende Transformation ψ , so dass $u_1(x) = \psi(u_2(x))$,

(ii) unter der Annahme, dass u_1, u_2, ψ differenzierbar sind, gilt $r_A(x, u_1) \geq r_A(x, u_2)$ für alle x genau dann, wenn ψ konkav ist.

Interpretieren Sie dieses Ergebnis in ökonomischen Termen.

3) Finden Sie die sogenannte CARA-Nutzenfunktion, dessen Arrow-Pratt Koeffizient der Risikoaversion konstant ist, d.h.

$$r_A(x, u) = a > 0 \quad \text{für alle } x.$$

Sei w der Reichtum eines Entscheiders mit CARA-Nutzenfunktion. Auf dem Markt wird eine Lotterie L gehandelt, die Beträge $G > B$ mit Wahrscheinlichkeiten p und $1 - p$ verspricht. Berechnen Sie den niedrigsten Verkaufspreis dieser Lotterie, bei dem der Entscheider zu verkaufen willig ist. Wie verhält sich dieser Verkaufspreis, wenn der Entscheider risikoaverser wird, d.h. $a \rightarrow \infty$?

4) Interpretieren Sie den relativen Arrow-Pratt Koeffizienten der Risikoaversion als Elastizität. Finden Sie die sogenannte HARA-Nutzenfunktion, dessen relativer Arrow-Pratt Koeffizient der Risikoaversion konstant ist, d.h.

$$r_R(x, u) = \rho \in [0, 1] \quad \text{für alle } x.$$