

Prof. Dr. Vladimir Shikhman  
Professur für Wirtschaftsmathematik  
Technische Universität Chemnitz

## Übung 6 zur Entscheidungstheorie (SS 2017) von Neumann-Morgenstern Expected Utility

Nutzenfunktion  $u : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  ist als Erwartungsnutzen auf Lotterien über  $n$  Konsequenzen darstellbar, falls es Zahlen  $u_1, \dots, u_n$  gibt, so dass  $u(p) = \sum_{i=1}^n u_i p_i$  für alle  $p \in \Delta$ . Lotterienpräferenz  $\succeq$  ist durch eine Nutzenfunktion  $u : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  repräsentierbar, falls

$$p \succeq p' \Leftrightarrow u(p) \geq u(p') \quad \text{für alle } p, p' \in \Delta.$$

Lotterienpräferenz  $\succeq$  ist unabhängig von irrelevanten Alternativen, falls

$$[p \succeq r \Leftrightarrow \alpha p + (1 - \alpha)s \succeq \alpha r + (1 - \alpha)s] \quad \text{für alle } p, r, s \in \Delta, \alpha \in [0, 1].$$

1) Eine Nutzenfunktion  $u : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann als Erwartungsnutzen darstellbar, wenn sie linear ist, d.h.

$$u \left( \sum_{k=1}^K \alpha_k p^k \right) = \sum_{k=1}^K \alpha_k u(p^k)$$

für alle  $p^k \in \Delta, \alpha_k \in [0, 1], k = 1, \dots, K, \sum_{k=1}^K \alpha_k = 1$  gilt.

2) Sei  $u$  als Erwartungsnutzen darstellbar und repräsentiere die Präferenz  $\succeq$ . Zeigen Sie:  $\tilde{u}$  ist genau dann ein anderer Erwartungsnutzen, der  $\succeq$  repräsentiert, wenn es  $b > 0$  und  $a \in \mathbb{R}$  gibt, so dass  $\tilde{u}(p) = bu(p) + a$  für alle  $p \in \Delta$ . Ist die Darstellbarkeit als Erwartungsnutzen kardinale oder ordinale Eigenschaft?

3) Sei die Lotterienpräferenz  $\succeq$  durch einen Erwartungsnutzen  $u : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  repräsentierbar. Zeigen Sie, dass  $\succeq$  rational, stetig und unabhängig von irrelevanten Alternativen ist.

4) Sei die Lotterienpräferenz  $\succeq$  rational und unabhängig von irrelevanten Alternativen. Dann gilt für  $p \succ r$  und  $\alpha, \beta \in [0, 1]$ :

$$\alpha p + (1 - \alpha)r \succeq \beta p + (1 - \beta)r \Leftrightarrow \alpha \geq \beta.$$

5) Sei die Lotterienpräferenz  $\succeq$  rational und unabhängig von irrelevanten Alternativen. Dann gilt das "Dutch book" Axiom:

$$p \succeq p', p \succeq p'' \Rightarrow p \succeq \alpha p' + (1 - \alpha)p'' \quad \text{für alle } p, p', p'' \in \Delta, \alpha \in [0, 1].$$

Interpretieren Sie das "Dutch book" Axiom in ökonomischen Termen.