Prof. Dr. Vladimir Shikhman
Professur für Wirtschaftsmathematik
Technische Universität Chemnitz

Übung 5 zur Entscheidungstheorie (SS 2017)
Rational Inattention

1) Die Informationskosten für $p \in \Delta_n$ seien $C(p) := \sum_{i=1}^n p_i \ln p_i + \ln n$. Für eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $p \in \Delta_n$ bezeichne $p_{(1)} \leq p_{(2)} \leq \ldots \leq p_{(n)}$ deren geordnete Komponenten. Für $p, p^* \in \Delta_n$ definiere die Relation $p \preceq p^*$, falls $\sum_{i=1}^k p_{(i)} \geq \sum_{i=1}^k p^*_{(i)}$.

(i) Zeichnen Sie die zu $p \in \Delta_n$ zugehörige Lorenz-Kurve durch die Punkte $\left(\frac{k}{n}, \sum_{i=1}^k p_{(i)}\right)$, $k = 1, \ldots, n$. Was lässt sich über die Lorenzkurven für p und p^* sagen, wenn $p \preceq p^*$? Interpretieren Sie die Relation $p \preceq p^*$ als "p ist unbestimmter als p^*".

(ii) Zeigen Sie, dass die Relation $p \preceq p^*$ auf Δ_n reflexiv und transitiv ist. Ist sie vollständig?

(iii) Bestimmen Sie alle größten und kleinsten Wahrscheinlichkeitsverteilungen in Δ_n bzgl. $\preceq$. Berechnen Sie deren Informationskosten.

(iv) Man zeige: $p \preceq p^* \Rightarrow C(p) \leq C(p^*)$.

Hinweis zu (iv): $p \preceq p^*$ genau dann, wenn es eine doppelt-stochastische $(n \times n)$-Matrix S (d.h. alle Zeilen- und Spaltensumme sind gleich 1) mit $p = p^* S$ gibt.

2) Die Informationskosten für $p \in \Delta_n$ seien $C(p) := \sum_{i=1}^n p_i \ln S_i(p)$, wobei die Funktion $S : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n_+$ die folgenden Eigenschaften besitzt:

(a) S ist differenzierbar, homogen und global invertierbar,

(b) $\sum_{i=1}^n p_i \ln S_i(p)$ ist konvex in p,

(c) $\sum_{i=1}^n \frac{p_i}{S_i(p)} \frac{\partial S_i(p)}{\partial p_k} = 1$ für alle $k = 1, \ldots, n$.

Zeigen Sie, dass die eindeutige Lösung des Inattention Problems $\max_{p \in \Delta_n} \sum_{i=1}^n p_i u_i - C(p)$ durch die folgende Formel gegeben wird:

$$p_i = \frac{S_i^{-1}(e^{u_1}, \ldots, e^{u_n})}{\sum_{i=1}^n S_i^{-1}(e^{u_1}, \ldots, e^{u_n})}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

3) Betrachte eine Partition der Alternativen $1, \ldots, n$ und bezeichne A_i die Alternativenteilmenge, die i enthält. Setzten Sie in der Aufgabe 2) speziell für $i = 1, \ldots, n$:

$$S_i(p) := p_i^\mu \left(\sum_{j \in A_i} p_j \right)^{1-\mu}, \quad \mu \in (0, 1].$$

Leiten Sie die Auswahlwahrscheinlichkeiten her und interpretieren Sie sie als Nested Logit.