Prof. Dr. Vladimir Shikhman
Professur für Wirtschaftsmathematik
Technische Universität Chemnitz

Übung 2 zur Entscheidungstheorie (SS 2017)
Discrete Choice: Random Utility

Die Wahrscheinlichkeitsdichten sind gegeben für

- Normalverteilung $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$: $f(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2}$, μ Erwartungswert, σ^2 Varianz;
- Gumbel-Verteilung $\mathcal{G}(0, \sigma^2)$: $f(y) = \frac{1}{\mu} e^{-\left(\frac{y}{\mu}+\gamma\right)-e^{-\left(\frac{y}{\mu}+\gamma\right)}}$, $\sigma^2 = \frac{\mu^2\pi^2}{6}$ Varianz, μ Parameter und $\gamma = 0,5772...$ die Eulersche Konstante;
- Logistische Verteilung $\mathcal{L}(0, \sigma^2)$: $f(y) = \frac{e^{-\frac{y}{\mu}}}{\mu\left(1+e^{-\frac{y}{\mu}}\right)^2}$, $\sigma^2 = \frac{\mu^2\pi^2}{3}$ Varianz, μ Parameter.

1) Es seien $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$ und $\varepsilon_j \sim \mathcal{N}(\mu_j, \sigma_j^2)$ stochastisch unabhängig und normalverteilt. Dann ist $\varepsilon_j - \varepsilon_i \sim \mathcal{N}(\mu_j - \mu_i, \sigma_i^2 + \sigma_j^2)$ normalverteilt.

Hinweis: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \sqrt{2\pi}$.

2) Es seien $\varepsilon_i \sim \mathcal{G}(0, \sigma^2)$ und $\varepsilon_j \sim \mathcal{G}(0, \sigma^2)$ stochastisch unabhängig und identisch Gumbel-verteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz $\sigma^2 = \frac{\mu^2\pi^2}{6}$. Dann ist $\varepsilon_j - \varepsilon_i \sim \mathcal{L}(0, \frac{\mu^2\pi^2}{3})$ logistisch verteilt.

3) Die Wahrnehmumgsfehler seien $\varepsilon_i \sim \mathcal{G}(0, \sigma^2)$, $i = 1, \ldots, n$, stochastisch unabhängig und identisch Gumbel-verteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz $\sigma^2 = \frac{\mu^2\pi^2}{6}$. Zeigen Sie, dass die zugehörigen Auswahlwahrscheinlichkeiten dem Logit-Modell entsprechen:

$$p_i = \frac{\exp\left(\frac{u_i}{\mu}\right)}{\sum_{i=1}^n \exp\left(\frac{u_i}{\mu}\right)}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

4) Berechnen Sie den erwarteten Nutzen

$$E(u_1, \ldots, u_n) := \mathbb{E}\left(\max_{1 \le i \le n} u_i + \varepsilon_i\right)$$

unter der Annahme, dass $\varepsilon_i \sim \mathcal{G}(0, \sigma^2)$, $i = 1, \ldots, n$, stochastisch unabhängig und identisch Gumbel-verteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz $\sigma^2 = \frac{\mu^2\pi^2}{6}$ sind. Überprüfen Sie, ob

$$\frac{\partial E}{\partial u_i} = p_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Hinweis: $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-kt} \ln t \, dt = -\frac{\ln k + \gamma}{k}$.