RANKING II

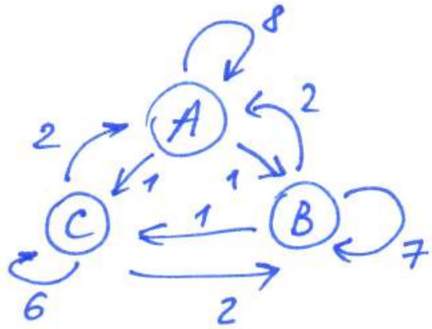
Marken A, B, C und Daten:

Familie 1: A A A A A A B A C A A A

Familie 2: C B B B B B B B B A

Familie 3: C C C C C C C B C A A

Wechselgraph



Wechselmatrix $P = (p_{ij})$ - W'keit des Wechsels von j nach i

$$
\begin{array}{cccc}
 & A & B & C \\
A & 8/10 & 2/10 & 2/10 \\
B & 1/10 & 7/10 & 2/10 \\
C & 1/10 & 1/10 & 6/10
\end{array}
$$

stochastische Matrix

Spaltensumme $= 1$, d.h. $e^T \cdot P = e^T$

$$(1, \dots, 1) \begin{pmatrix} \dots & p_{1j} & \dots \\ & \vdots & \\ & p_{nj} & \end{pmatrix} = \Big(\dots, \overset{1}{\overset{\shortparallel}{\sum_{i=1}^{n} p_{ij}}}, \dots\Big)$$

$x(t)$ - Marktanteile zum Zeitpunkt t, d.h.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ x_i(t) \in [0,1] \quad \forall i = 1, \dots, n \\ \bullet\ \sum_{i=1}^{n} x_i(t) = 1 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \bullet\ x(t) \geq 0 \\ \bullet\ e^T x(t) = 1. \end{array}\right.$$

Marktanteil der i-ten Marke zum Zeitpunkt t

Kaufdynamik

Anteil von Kunden, die von der j-ten Marke auf die i-te umsteigen

$$x_i(t+1) = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} \cdot x_j(t)$$

Anteil von Kunden, die i-te Marke zum Zeitpunkt t+1 konsumieren

Anteil von Kunden, die j-te Marke zum Zeitpunkt t konsumieren

$$x(t+1) = P \cdot x(t)$$ Markov-Kette

- $x(t+1) = \underbrace{P}_{\geq 0} \cdot \underbrace{x(t)}_{\geq 0} \geq 0$
- $e^T \cdot x(t+1) = \underbrace{e^T \cdot P}_{= e^T} \cdot x(t) = e^T \cdot x(t) = 1$

$\Rightarrow x(t+1)$ – Marktverteilung.

z. B. $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ – Permutationsmatrix, $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Anfansanteile

$x(1) = P \cdot x(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ → Oszillation, keine Konvergenz!

$x(2) = P \cdot x(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ u.s.w.

Falls $x(t) \to \bar{x}$, $t \to \infty$, dann gilt:

$$x(t+1) = P \cdot x(t), \quad x(t) \geq 0, \quad e^T \cdot x(t) = 1$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\bar{x} = P \cdot \bar{x}, \quad \bar{x} \geq 0, \quad e^T \cdot \bar{x} = 1}$$

Stationäre Marktverteilung

"Ranking"

Aufwand: "Matrix · Vektor"

(weniger Speicherplatz nötig)

$$\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/10 & 2/10 & 2/10 \\ 1/10 & 7/10 & 2/10 \\ 1/10 & 1/10 & 6/10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \bar{x}_1 = \frac{1}{2}, \ \bar{x}_2 = \frac{3}{10}, \ \bar{x}_3 = \frac{1}{5}$ (50% : 30% : 20%)

Konvergenz

Annahme: P besitzt eine positive Zeile

z. B. i-te Zeile $\underset{>0}{p_{i1}}, \dots, \underset{>0}{p_{in}}$ hat positive Elemente

- Setze $\alpha := \min\limits_{1 \le j \le n} p_{ij} > 0$ (kleinstes Eintrag in der Zeile)

$$B := \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-te Zeile aus Einsen}$$

$\boxed{\underset{\text{o.B.d.A}}{1 > \alpha > 0}}$

ansonsten $P = \begin{pmatrix} \dots 0 \dots \\ 1 \dots 1 \\ \dots 0 \dots \end{pmatrix}$

$$\bar{P} := \frac{P - \alpha \cdot B}{1 - \alpha} \Rightarrow P = (1-\alpha) \cdot \bar{P} + \alpha \cdot B$$

Konvexkombination von $\bar{P}$ und B

$\bar{P}$ – stoch. Matrix:

- $\bar{P} = \dfrac{P - \alpha \cdot B}{1 - \alpha} \ge 0$, da i-te Zeile $p_{ij} - \alpha \cdot 1 \ge 0 \Leftrightarrow p_{ij} \ge \min\limits_{1 \le j \le n} p_{ij}$.
- $e^T \cdot \bar{P} = e^T \cdot \dfrac{P - \alpha \cdot B}{1 - \alpha} = \dfrac{\overbrace{e^T \cdot P}^{=e^T} - \alpha \cdot \overbrace{e^T \cdot B}^{=e^T}}{1 - \alpha} = \left(\dfrac{1-\alpha}{1-\alpha}\right) \cdot e^T = e^T$.

Benutze 1-Norm / Summennorm für Abschätzungen: $\|x\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i| = e^T \cdot |x|$

Summe von Beträgen — Vektor aus Beträgen

stationäre Verteilung

$$\|x(t+1) - \bar{x}\|_1 = \|P \cdot x(t) - P \cdot \bar{x}\|_1 = \|P \cdot (x(t) - \bar{x})\|_1 = \|(1-\alpha)\bar{P}(x(t) - \bar{x}) +$$

$$+ \cancel{\alpha \cdot B(x(t) - \bar{x})}\|_1 = (1-\alpha) \cdot \|\bar{P} \cdot (x(t) - \bar{x})\|_1$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \dots 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \dots 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sum x_i(t) \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ \sum \bar{x}_i \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= (1-\alpha) \cdot e^T \cdot \underbrace{|\bar{P} \cdot (x(t) - \bar{x})|}_{\le \bar{P} \cdot |x(t) - \bar{x}|} \le (1-\alpha) \cdot \underbrace{e^T \cdot P}_{=e^T} |x(t) - \bar{x}| = (1-\alpha) \|x(t) - \bar{x}\|_1$$

Dreiecksungleichung $|a+b| \le |a| + |b|$

Insgesamt: $\|x(t+1) - \bar{x}\|_1 \le (1-\alpha) \|x(t) - \bar{x}\|_1 \le (1-\alpha)^2 \|x(t-1) - \bar{x}\|_1 \le$

$$\le \dots \le \underbrace{(1-\alpha)}_{\in [0,1)}{}^{t+1} \underbrace{\|x(0) - \bar{x}\|}_{\text{Zahl}} \to 0 \text{ für } t \to \infty.$$

lineare Konvergenz mit Rate $(1-\alpha)$

Google - Matrix

Übergangsmatrix

$$x(t+1) = P \cdot x(t)$$

Nutzeranteile zum Zeitpunkt $t+1$

Nutzeranteile zum Zeitpunkt t

Positive Zeile → Seite, auf welche alle anderen verweisen

Globale Autorität →

Konvexkombination

$$x(t+1) = \Big[(1-\alpha) \cdot P + \alpha \cdot \underbrace{E}_{= \begin{pmatrix} 1/n & \cdots & 1/n \\ \vdots & & \\ 1/n & \cdots & 1/n \end{pmatrix}} \Big] \cdot x(t)$$

mit W'keit $1-\alpha$ — Übergang

mit W'keit α — Neuanfang

- gestörtes Surferverhalten

$\alpha \approx 0.15$

- lineare Konvergenz mit Rate $1-\alpha$ (Ü)