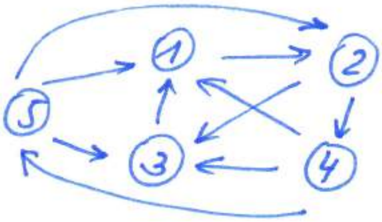
RANKING I

Google-Problem

Web-Seiten mit Links auf Google-Anfrage:

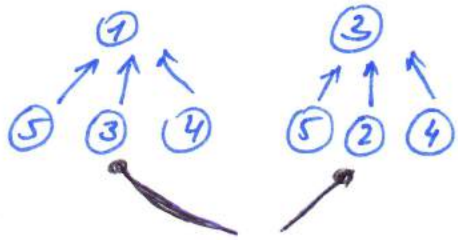


Ranking: Welche Seite ist populär?

z. B. Anzahl eingehender Links

	1	2	3	4	5
# Links:	3	2	3	1	1
Ranking:	I-II	III	I-II	IV-V	IV-V

Aber:



3 populärer als 2

"Vergleich zweiter Stufe nötig!"

Google-Ansatz (intuitiv):

$\boxed{\text{Web-Seite ist populär, wenn andere populäre Seiten darauf verweisen}}$

Übergangsmatrix A:

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 \\
2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\
3 & 0 & 1/2 & 0 & 1/3 & 1/3 \\
4 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\
5 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\
\hline
 & 1 & 2 & 1 & 3 & 3
\end{array}
$$

← Anzahl ausgehender Links

$= (p_{ij})$ - Wahrscheinlichkeit des Übergangs $j \rightarrow i$

Spaltensumme eins:

$$\forall j \quad \sum_{i=1}^{n} p_{ij} = 1 \Leftrightarrow \forall j \quad \underbrace{(1,\dots,1)}_{=e} \begin{pmatrix} p_{1j} \\ \vdots \\ p_{nj} \end{pmatrix} = 1$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{e^T \cdot A = e^T}_{\text{zusammengefasst}}$$

"stochastische Matrix"

Google-Ansatz (mathematisch) : $x_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} \cdot x_j$ ← Ranking der j-ten Seite

↑ Ranking der i-ten Seite ↑ W'keit des Übergangs $j \to i$

Löse: $Px = x$, $x \geq 0$, $\underbrace{x \neq 0}_{\text{o.B.d.A. } \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \Leftrightarrow e^T x = 1}$

"nur Anteile entscheidend"

$$\boxed{\text{Ranking: } \underset{\bar{x}}{} \quad P\bar{x} = \bar{x}, \ \bar{x} \geq 0, \ e^T\bar{x} = 1}$$

Eigenvektor zum Eigenwert 1 (Ü)

Existenz: Betrachte ein Hilfssystem $\underbrace{Px \leq x, \ x \geq 0, \ e^T x \geq 1}_{(H)}$

Sei x - Lösung von H; definiere $\underline{\bar{x} := \frac{x}{e^T x} \geq 0}$

Es gilt:

- $\underbrace{e^T}_{>0} \underbrace{(\bar{x} - P\bar{x})}_{= \frac{x}{e^T x} - P\left(\frac{x}{e^T x}\right) = \frac{1}{e^T x}(x - Px) \geq 0} = e^T \bar{x} - \underbrace{e^T P}_{= e^T} \cdot \bar{x} = e^T\bar{x} - e^T\bar{x} = 0 \quad \Rightarrow \underline{\bar{x} - P\bar{x} = 0}$
- $e^T \cdot \bar{x} = e^T \left(\frac{x}{e^T x}\right) = \frac{e^T x}{e^T x} = 1 \Rightarrow \underline{e^T \bar{x} = 1} \longrightarrow \bar{x}$ - Ranking

[Dualität der Linearen Optimierung.

(P) $\min\limits_{x} \underset{1 \times n \cdot n \times 1}{c^T x}$ s.t. $\underset{m \times n \cdot n \times 1 \geq m \times 1}{A \cdot x \geq b}$, $x \geq 0$ - primales Problem

(D) $\max\limits_{y} \underset{1 \times m \cdot m \times 1}{y^T b}$ s.t. $\underset{n \times m \cdot m \times 1 \leq n \times 1}{A^T y \leq c}$, $y \geq 0$ - duales Problem

"starke Dualität"

- (P) lösbar ⟺ (D) lösbar — $c^T\bar{x} = \bar{y}^T b$; $\bar{x}, \bar{y}$ optimal
- (P) oder (D) lösbar ⟹ Optimalwerte in (P) und (D) sind gleich

Gilt immer: $\underbrace{c^T}_{\geq A^T y} \underbrace{x}_{\geq 0} \geq (A^T y)^T x = \underbrace{y^T}_{\geq 0} \underbrace{A \cdot x}_{\geq b} \geq y^T b$

$\underline{x, y \text{ zulässig}}$

obere Schranke für (D) — untere Schranke für (P) — "schwache Dualität"]

$$(P) \quad \min_x \underbrace{0^T}_{c} \cdot x \quad \text{s.t.} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} I - P \\ \hline e^T \end{pmatrix}}_{A} \cdot x \geq \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline 1 \end{pmatrix}}_{b}, \; x \geq 0 \qquad (\text{"}H\text{"})$$

$I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ Einheitsmatrix

$$(D) \quad \max_{y, y_{n+1}} (0, \dots, 0, 1) \cdot \begin{pmatrix} y \\ y_{n+1} \end{pmatrix} \quad \text{s.t.} \quad \begin{pmatrix} I - P \\ \hline e \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} y \\ y_{n+1} \end{pmatrix} \leq 0, \; y, y_{n+1} \geq 0.$$

$$= y_{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \left((I - P)^T / e \right) \begin{pmatrix} y \\ y_{n+1} \end{pmatrix} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (I - P^T) \cdot y + y_{n+1} \cdot e \leq 0$$

$$\Leftrightarrow y_{n+1} \cdot e \leq P^T y - y$$

Ist (D) lösbar?

$$\max_{y, y_{n+1}} y_{n+1} \quad \text{s.t.} \quad y_{n+1} \cdot e \leq P^T \cdot y - y \; ; \; y_{n+1}, y \geq 0.$$

Kandidat für Lösung: $y = e$, $y_{n+1} = 0$ $\longrightarrow$ Optimalität (Ü)

Zulässigkeit:

$$0 = 0 \cdot e \leq P^T \cdot e - e = e - e = 0$$

$$\left[(P^T \cdot e)^T = e^T \cdot P = e^T \;\Rightarrow\; P^T \cdot e = e \right]$$

Obiges Beispiel: $P\bar{x} = \bar{x} \Leftrightarrow (I - P) \cdot \bar{x} = 0$

↑ Lineares Gleichungssystem mittels Gauß-Algorithmus lösen

$$I - P = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1/3 & -1/3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & -1/2 & 1 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & -1 & -1/3 & -2/3 \\ 0 & -1/2 & 1 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -4/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & -1/3 & 1 \end{pmatrix} \text{(Ü)} \sim \dots$$

Google-Ranking

$$x = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 17/60 \\ 18/60 \\ 13/60 \\ 9/60 \\ 3/60 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \text{II} \\ \text{I} \\ \text{III} \\ \text{IV} \\ \text{V} \end{array} \end{array}$$

zweite Seite "gewinnt"

- zu langsam $\longrightarrow$ neue Idee
- viel Speicherplatz (iterative Berechnung)

Aufwand: "Lin. Gleichungssystem lösen"