

ONLINE LEARNING II

1

$$R_t = \max_{x \in X} \frac{1}{t} \sum_{e=1}^t u(x, p(e)) - \frac{1}{t} \sum_{e=1}^t u(x(e), p(e)) \rightarrow 0 \text{ führt } \rightarrow \infty.$$

↑ Regret

↑ zu wählen!

Online Gradientenverfahren

$$x(e) \rightarrow \max_{x \in X} u(x, p(e)) \rightarrow x(e+1)$$

Aktion zum Zeitpunkt e

↑ Parameter zum Zeitpunkt e

Aktion zum Zeitpunkt $e+1$

In welche Richtung wächst $u(\cdot, p(e))$ ausgehend von $x(e)$?

$$\max_{h^T h = \|h\|_2^2 = 1} u(x(e) + h, p(e)) \approx u(x(e), p(e)) + \nabla_x^T u(x(e), p(e)) \cdot h$$

Taylor-Formel

wähle Anstiegsrichtung $\bar{h}$!

Multiplikationsregel von Lagrange: $\nabla_x u(x(e), p(e)) = 2 \cdot \lambda \cdot \bar{h}$

Niveaulinie

↑ Lagrange-Multiplikator

$$\Rightarrow \bar{h} = \frac{1}{2 \cdot \lambda} \nabla_x u(x(e), p(e))$$

$\underbrace{2 \cdot \lambda}_{=: \alpha > 0}$

$\nabla_x^T u(x(e), p(e)) \cdot \bar{h} = 2 \cdot \lambda \cdot \underbrace{\bar{h}^T \bar{h}}_{=1} = 2 \cdot \lambda > 0$

positiv, da Maximum

↓ Schrittweite

$$y(e+1) := x(e) + \alpha \cdot \nabla_x u(x(e), p(e)) - \text{Gradientenschritt}$$

möglicherweise unzulässig, d.h. $y(e+1) \notin X$

$$x(e+1) = \arg \min_{x \in X} \|y(e+1) - x\|_2 - \text{Projektionsschritt}$$



Konvergenz

12

$$R_t = \frac{1}{t} \sum_{\ell=1}^t u(x, p(\ell)) - u(x(\ell), p(\ell)) \leq \frac{1}{t} \sum_{\ell=1}^t \underbrace{\nabla_x^T u(x(\ell), p(\ell))}_{\text{konkav}} (x - x(\ell))$$

$$= \frac{1}{\alpha} \left[y(\ell+1) - x(\ell) \right]^T$$

↑
Methode

$$\left[(y(\ell+1) - x(\ell))^T (x - x(\ell)) \right] = \frac{1}{2} \left(\|x - x(\ell)\|_2^2 + \|x(\ell) - y(\ell+1)\|_2^2 - \|x - y(\ell+1)\|_2^2 \right)$$

↖ $z^T z = \|z\|_2^2$

$$\leq \frac{1}{2} \left(\alpha^2 G^2 + \|x - x(\ell)\|_2^2 - \|x - x(\ell+1)\|_2^2 \right)$$

$= \left\| \alpha \nabla_x^T u(x(\ell), p(\ell)) \right\|_2^2$
 $\leq \alpha^2 G^2 \text{ (Annahme)}$
 $\left. \begin{array}{l} \text{Projektion} \\ \geq \|x - x(\ell+1)\|_2^2 \end{array} \right\}$

$$\leq \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{\ell=1}^t \alpha^2 G^2 + \sum_{\ell=1}^t \|x - x(\ell)\|_2^2 - \|x - x(\ell+1)\|_2^2 \right)$$

" 1 - 2 + 2 - 3 + 3 - ... - t + 1 "

$$= \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{2} \left(\alpha^2 G^2 t + \underbrace{\|x - x(1)\|_2^2 - \|x - x(t+1)\|_2^2}_{\leq 0} \right)$$

$\leq \left[\underbrace{\|x\|_2}_{\leq R} + \underbrace{\|x(1)\|_2}_{\leq R} \right]^2 = 4R^2$

$$= \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{2} \left(\alpha^2 G^2 t + 4R^2 \right) = \frac{\alpha \cdot G^2}{2} + \frac{2R^2}{t \cdot \alpha}$$

$$= \frac{2 \cdot R}{G \cdot \sqrt{t}} \cdot \frac{G^2}{2} + \frac{2 \cdot R^2}{t \cdot \frac{2 \cdot R}{G \cdot \sqrt{t}}} = \frac{R \cdot G}{\sqrt{t}} + \frac{R \cdot G}{\sqrt{t}} = \frac{2R \cdot G}{\sqrt{t}} \rightarrow 0$$

Wähle Schrittweiten $\alpha = \frac{2 \cdot R}{G \cdot \sqrt{t}}$ für $t \rightarrow \infty$

Fazit: $\frac{1}{\sqrt{t}} \sim R_t \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$

Online Investieren

(3)

$$u(x, p) = \ln p^T x, \quad x \in \Delta$$

$$y(l+1) := x(l) + \alpha \cdot \frac{p(l)}{p^T(l) \cdot x(l)}$$

relative Preise
in der Periode l

- Feedback von
Preisen

$$x(l+1) := \operatorname{argmin}_{x \in \Delta} \|y(l+1) - x\|_2$$

Gewinn in
der Periode l

- Umverteilung des
Portfolios

- Schrittweitensteuerung: $\alpha = \frac{2 \cdot R}{G \cdot \sqrt{t}} = \frac{2 \cdot 1}{(\bar{p} \cdot \sqrt{n} / p) \sqrt{t}} = \frac{2 \cdot p}{(\bar{p} \cdot \sqrt{n}) \cdot \sqrt{t}}$
- Orthogonale Projektion auf Simplex:

$$\min_{x \in \Delta} \|y - x\|_2 \Leftrightarrow \min_{\substack{e^T x = 1 \\ x \geq 0}} \frac{1}{2} \|y - x\|_2^2$$

$$\min_{\substack{e^T x = 1 \\ x \geq 0}} \frac{1}{2} \|y - x\|_2^2 = \min_{x \geq 0} \max_{\lambda} \left\{ \frac{1}{2} \|y - x\|_2^2 + \lambda (e^T x - 1) \right\}$$

→ ∞ durch
geeignete
Wahl von λ
falls $\neq 0$

$$= \max_{\lambda} \min_{x \geq 0} \left\{ \frac{1}{2} \|y - x\|_2^2 + \lambda \cdot e^T x - \lambda \right\}$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [(y_i - x_i)^2 + 2\lambda x_i] - \lambda$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [(y_i - x_i - \lambda)^2 + 2(y_i - x_i) \cdot \lambda - \lambda^2 + 2\lambda x_i] - \lambda$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (y_i - \lambda - x_i)^2 + \lambda (e^T y - 1) - \frac{n \cdot \lambda^2}{2}$$

$$= \max_{\lambda} \min_{x \geq 0} \left\{ \frac{1}{2} \|y - \lambda \cdot e - x\|_2^2 + \lambda (e^T y - 1) - \frac{n}{2} \lambda^2 \right\}$$

unabhängig von x

$$x^* = [y - \lambda^* e]_+ \text{ - Lösung}$$

Projektion auf $\mathbb{R}_+^n$
von $y - \lambda e$

ist $[y - \lambda e]_+ = x$ - "alle negativen Einträge
löschen"

$$= \max_{\lambda} \frac{1}{2} n \| (y - \lambda e) - [y - \lambda e]_+ \|_2^2 + \lambda (e^T y - 1) - \frac{n}{2} \lambda^2$$

$$= [y - \lambda e]_+$$

$$= \max_{\lambda} \frac{1}{2} \|y - \lambda e\|_2^2 + \lambda (e^T y - 1) - \frac{n}{2} \lambda^2$$

eindimensionale
Optimierung λ -Max

(ü)