

ONLINE LEARNING I

(1)

Sequentielles Investieren: Wertpapiere $1, \dots, n$

Portfolioentscheidung, d.h. $x_i(t) \geq 0$ $\Rightarrow x(t) \in \Delta$
 am (Anfang) der Periode t $\sum_{i=1}^n x_i(t) = 1$ Simplex
 $x(t)$

Zeit
 $K(t-1)$ $\uparrow$ Kapital zum Zeitpunkt $t-1$
 $K(t)$ $\uparrow$ Kapital zum Zeitpunkt t

$P_i(t-1)$ $\uparrow$ Kurs zum Zeitpunkt $t-1$
 $P_i(t)$ $\uparrow$ Kurs zum Zeitpunkt t
 $p_i(t) = \frac{P_i(t)}{P_i(t-1)}$ - Rendite am Ende der Periode t
 = relativer Preis

$$K(t) = \sum_{i=1}^n K(t-1) \cdot x_i(t) \cdot p_i(t) = K(t-1) \cdot p^T(t) \cdot x(t) =$$

$$= K(t-2) \cdot p^T(t-1) \cdot x(t-1) \cdot p^T(t) \cdot x(t) = \dots =$$

Vergleich

$$= K_0 \cdot \prod_{\ell=1}^t p^T(\ell) \cdot x(\ell)$$

"Aktives Investieren ohne Information"

$$\max_x K_x(t) = K_0 \cdot \prod_{\ell=1}^t p^T(\ell) \cdot x$$

"Passives Investieren mit Information"

pro Periode

konstant über Zeit

$$\frac{1}{t} \cdot \ln \left(\frac{\max_x K_x(t)}{K(t)} \right) = \frac{1}{t} \ln \max_x K_x(t) - \frac{1}{t} \ln K(t) =$$

Logarithmische Kapitalrelation/Weber-Fechner-Law

$$= \frac{1}{t} \sum_{\ell=1}^t \ln p^T(\ell) \cdot x - \frac{1}{t} \sum_{\ell=1}^t \ln p^T(\ell) \cdot x(\ell)$$

log. Nutzen

mittleres Bedauern oder "regret"

→ minimieren / kontrollieren

Online Optimierung

(2)

$u(x, p)$ - Nutzenfunktion

Hier: $u(x, p) = \ln p^T x$

$X = \Delta$

zulässige Aktion $x \in X$

Parameter

$$\max_{x \in X} \frac{1}{t} \sum_{\ell=1}^t u(x, p(\ell)) - \frac{1}{t} \sum_{\ell=1}^t u(x(\ell), p(\ell))$$

Nutzen im Mittel für beste Aktion

Nutzen im Mittel für sequentielle Aktionen

Bedauern/Regret im Mittel

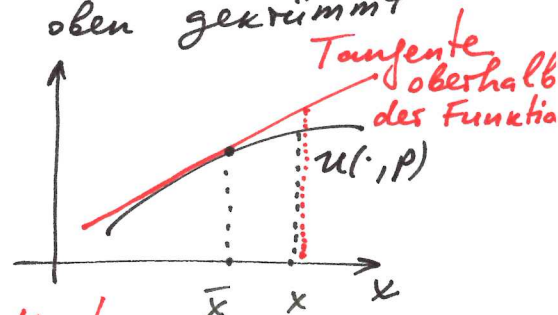
$R_t \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$
Wie wählt man $x(\ell)$?

① Nutzenfunktion

$u(\cdot, p)$ - konkav in x , d.h. der Graph ist nach oben gekrümmt

$$u(x, p) \leq u(\bar{x}, p) + \nabla_x^T u(\bar{x}, p) (x - \bar{x})$$

$$= \left(\frac{\partial u(\bar{x}, p)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u(\bar{x}, p)}{\partial x_n} \right)^T$$



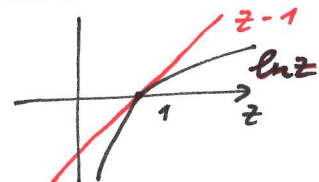
② Konkave/konvexe Funktionen

z.B.

$$\ln p^T x \leq \ln p^T \bar{x} + \nabla_x^T \ln(p^T \bar{x}) (x - \bar{x})$$

$$\ln \frac{p^T x}{p^T \bar{x}} \leq \frac{1}{p^T \bar{x}} p^T (x - \bar{x}) = \frac{p^T x}{p^T \bar{x}} - 1 \Leftrightarrow \ln z \leq z - 1 \quad (\text{OK})$$

$$\Rightarrow \ln p^T x \text{ konkav in } x$$



$\| \nabla_x u(x, p) \|_2 \leq G \quad \forall x, p$ - Gradienten sind beschränkt
Euklidische Norm, d.h. $\|z\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n z_i^2} = \sqrt{z^T z}$

z.B. $\| \nabla_x \ln p^T x \|_2 = \left\| \frac{p}{p^T x} \right\|_2 = \frac{\|p\|_2}{|p^T x|} \leq \frac{\bar{p} \cdot \sqrt{n}}{p} =: G$

Annahme: $0 < p \leq p_i \leq \bar{p} \quad \forall i=1, \dots, n$
Preiskorridor

$$\|p\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n p_i^2} \leq \bar{p} \cdot \sqrt{n}$$

$$|p^T x| = \sum_{i=1}^n p_i x_i \geq p \cdot \sum_{i=1}^n x_i = p$$

② Zulässige Menge X

(3)

- abgeschlossen, d.h. $x^k \rightarrow \bar{x}$ und $x^k \in X \Rightarrow \bar{x} \in X$

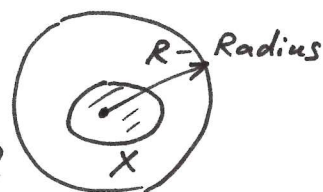
z.B. $x^k \in \Delta$, $x^k \rightarrow \bar{x} \Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i^k = 1, x_i^k \geq 0$

$$\sum_{i=1}^n \bar{x}_i = 1, \bar{x}_i \geq 0 \Rightarrow \bar{x} \in \Delta$$

- Beschränkt, d.h. $\|x\|_2 \leq R \quad \forall x \in X$

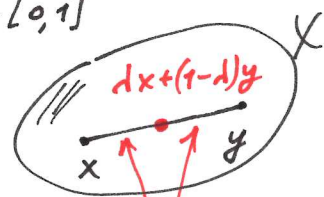
z.B. $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \underbrace{x_i \cdot x_i}_{\leq 1}} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \underbrace{x_i}_{=1}} = 1 = R$

für alle $x \in \Delta$.



- Konvex, d.h. $\lambda x + (1-\lambda)y \in X \quad \forall x, y \in X, \lambda \in [0,1]$

z.B. $\sum_{i=1}^n \lambda x_i + (1-\lambda)y_i = \lambda \sum_{i=1}^n x_i + (1-\lambda) \sum_{i=1}^n y_i = \lambda + (1-\lambda) = 1$



$\lambda \underbrace{x_i}_{\geq 0} + (1-\lambda) \underbrace{y_i}_{\geq 0} \geq 0 \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda)y \in \Delta$

für $x, y \in \Delta, \lambda \in [0,1]$

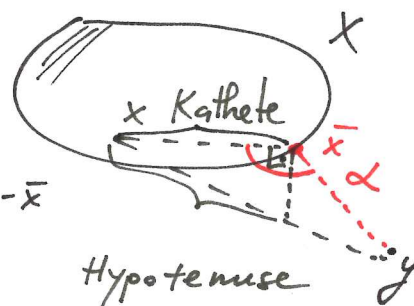
Strecke zwischen
Strecke zwischen
 x und y

$\Rightarrow$ • Euklidische / Orthogonale Projektion von $y \in \mathbb{R}^n$ auf X ist eindeutig, d.h.

$\arg \min_{x \in X} \|y - x\|_2 = \{\bar{x}\}$ (ii)

- Winkel α zwischen $y - \bar{x}$ und $x - \bar{x}$ ist stumpf, d.h. (ii)

$(y - \bar{x})^T (x - \bar{x}) \leq 0 \quad \forall x \in X$



- Abstand von x zu $\bar{x}$ ist kleiner oder gleich als der Abstand zwischen x und y :

$\|x - \bar{x}\|_2 \leq \|x - y\|_2$

z.B. $\min_{x \in \Delta} \|y - x\|_2$ - orthogonale Projektion auf Simplex