

Classification I

1

m Klassen: $C_1, \dots, C_m$

p Merkmale: $1, \dots, p$

n Datensätze: $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^p$

Klassenzuordnung
des Datensätze

$\forall i \in \{1, \dots, n\} \exists! \ell \in \{1, \dots, m\}$
mit $i \in C_\ell$ ↑ eindeutig

Frage: zu welcher Klasse gehört ein neuer Datensatz $x \in \mathbb{R}^p$?

z.B. C_1 - "kreditwürdig"

C_2 - "nicht kreditwürdig"

Merkmale:

- Einkommen
- Zahl der Kreditkarte
- Beschäftigungsdauer etc.

Gegeben Kundenstatistik, wie soll ein Newcomer eingestuft werden?

Diskriminanzanalyse

Mittelwert $\bar{x}_\ell := \frac{1}{n_\ell} \sum_{i \in C_\ell} x_i$
der ℓ -ten Klasse
Anzahl der Datensätze in der ℓ -ten Klasse

Lineare Diskriminante
"Preise für Merkmale"

$a^\top \bar{x}_\ell, \ell = 1, \dots, m$
"Klassenperformance im Mittel"

x gehört zu $C_{\hat{\ell}}$, falls $|a^\top x - a^\top \bar{x}_{\hat{\ell}}| = \min_{\ell=1, \dots, m} |a^\top x - a^\top \bar{x}_\ell|$
Klasse mit nächster Bewertung

Zur Wahl von $a \in \mathbb{R}^p$: Varianz von Bewertungen

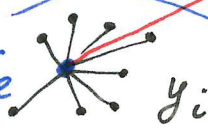
$$y := a^\top x$$

zwischen Klassen maximieren

innerhalb von Klassen minimieren

Mittelwert der ℓ -ten Klasse

$$\frac{1}{n_\ell} \sum_{i \in C_\ell} y_i = \bar{y}_\ell$$

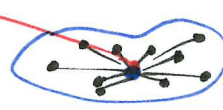
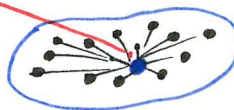


C_ℓ

...

$$\bar{y} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$

Mittelwert über alle Daten



$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \frac{1}{n} \sum_{e=1}^m \sum_{i \in C_e} (y_i - \bar{y}_e + \bar{y}_e - \bar{y})^2 = \frac{1}{n} \sum_{e=1}^m \sum_{i \in C_e} (y_i - \bar{y}_e)^2 + (\bar{y}_e - \bar{y})^2 \quad (2)$$

$$+ \frac{1}{n} \sum_{e=1}^m \sum_{i \in C_e} 2(y_i - \bar{y}_e)(\bar{y}_e - \bar{y})$$

$$2 \left(\sum_{i \in C_e} y_i \cdot \bar{y}_e + \sum_{i \in C_e} \bar{y}_e \cdot \bar{y} - \sum_{i \in C_e} \bar{y}_e^2 - \sum_{i \in C_e} y_i \cdot \bar{y} \right)$$

$$n_e \bar{y}_e \bar{y}_e + n_e \bar{y}_e \bar{y} - n_e \bar{y}_e^2 - n_e \bar{y}_e \bar{y} = 0$$

$$= \sum_{e=1}^m \frac{n_e}{n} \sum_{i \in C_e} \frac{1}{n_e} (y_i - \bar{y}_e)^2 + \sum_{e=1}^m \frac{n_e}{n} (\bar{y}_e - \bar{y})^2$$

Gewichtung
der e-ten
Klasse

Varianz innerhalb
der e-ten Klasse

Varianz zwischen
den Klassen

$$\left[\begin{aligned} (y_i - \bar{y}_e)^2 &= a^T (x_i - \bar{x}_e) \cdot (x_i - \bar{x}_e)^T a \\ (\bar{y}_e - \bar{y})^2 &= a^T (\bar{x}_e - \bar{x}) \cdot (\bar{x}_e - \bar{x})^T a \end{aligned} \right] \Rightarrow \left[\begin{aligned} W &:= \sum_{e=1}^m \sum_{i \in C_e} (x_i - \bar{x}_e) \cdot (x_i - \bar{x}_e)^T \\ B &:= \sum_{e=1}^m n_e (\bar{x}_e - \bar{x}) \cdot (\bar{x}_e - \bar{x})^T \end{aligned} \right]$$

$$= \frac{1}{n} \cdot a^T \cdot W \cdot a + \frac{1}{n} a^T \cdot B \cdot a$$

symmetrische Matrizen
und positiv semi-definite
Normierung, da skalierungs-
invariant

Fisher 1936:

$$\max_{a \in \mathbb{R}^P} \frac{a^T \cdot B \cdot a}{a^T \cdot W \cdot a} = \max_{a^T \cdot W \cdot a = 1} a^T \cdot B \cdot a$$

$$\text{Lagrange: } \nabla (a^T \cdot B \cdot a) = \lambda \cdot \nabla (a^T \cdot W \cdot a)$$

- Ansatz

$$B \cdot a = \lambda \cdot W \cdot a$$

$$\Rightarrow a^T \cdot B \cdot a = \lambda \cdot \frac{a^T \cdot W \cdot a}{1} = \lambda - \text{optimalwert}$$

$$\Rightarrow W^{-1} B \cdot a = \lambda \cdot a \Rightarrow a - \text{Eigenvektor zum Eigenwert } \lambda \text{ von der Matrix } W^{-1} B.$$

Insgesamt: Diskriminante a ist der Eigenvektor von $W^{-1} B$ zum größten Eigenwert.

W^{-1} invertierbar, falls es genügend viele linear unabhängige Datensätze gibt ($(x_i - \bar{x}_e)(x_i - \bar{x}_e)^T = \frac{1}{n} \frac{P}{P} = \frac{1}{n} \frac{P}{\text{Rang 1-Indute}}$)

Gauß - Diskriminanz

(3)

x gehört zu $C_{\tilde{e}}$, falls $f_{\tilde{e}}(x) = \max_{l=1, \dots, m} f_l(x)$ Likelihood, daß x zur Klasse l gehört

p -dim Gauß-Dichte

$$f_l(x) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2} \sqrt{\det(\Sigma_l)}} e^{-\frac{1}{2}(x - \mu_l)^T \Sigma_l^{-1} (x - \mu_l)}$$

Mittelwert der l -ten Klasse Kovarianzmatrix

z.B. Schätzung: $\mu_l := \frac{1}{n_l} \sum_{i \in C_l} x_i$, $\Sigma_l := \frac{1}{n_l} \sum_{i \in C_l} (x_i - \mu_l)(x_i - \mu_l)^T$

$p \mid \boxed{\quad}$ $p \mid 1 \quad p$

$$\min_{l=1, \dots, m} (x - \mu_l)^T \Sigma_l^{-1} (x - \mu_l)$$

Mahalanobis - Distanz

Annahme: $\Sigma_l = \Sigma$ - konstant

$$\left[\begin{array}{l} \mu_l = \bar{x}_l, \sum_{l=1}^m n_l \cdot \Sigma_l = \sum_{l=1}^m \sum_{i \in C_l} (x_i - \mu_l)(x_i - \mu_l)^T = W \\ \Rightarrow \Sigma = \frac{1}{n} W \end{array} \right]$$

Spezialfall: $m=2$ (zwei Klassen)

x gehört zu C_1 , falls $(x - \mu_1)^T \Sigma^{-1} (x - \mu_1) < (x - \mu_2)^T \Sigma^{-1} (x - \mu_2)$

$$\Leftrightarrow x^T \Sigma^{-1} x - 2 \mu_1^T \Sigma^{-1} x + \mu_1^T \Sigma^{-1} \mu_1 < x^T \Sigma^{-1} x - 2 \mu_2^T \Sigma^{-1} x + \mu_2^T \Sigma^{-1} \mu_2$$

$$\Leftrightarrow (\mu_1 - \mu_2)^T \Sigma^{-1} x > \frac{1}{2} (\mu_1^T \Sigma^{-1} \mu_1 - \mu_2^T \Sigma^{-1} \mu_2)$$

$$\Leftrightarrow (\mu_1 - \mu_2)^T \Sigma^{-1} (x - \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2)) + (\mu_1 - \mu_2)^T \Sigma^{-1} \cdot \frac{1}{2} \mu_1 + (\mu_1 - \mu_2)^T \Sigma^{-1} \cdot \frac{1}{2} \mu_2 > 0$$

$$(\mu_1 - \mu_2)^T \Sigma^{-1} (x - \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2)) > 0$$

[z.B. $W^{-1}(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$ - EV für $W^T B$]

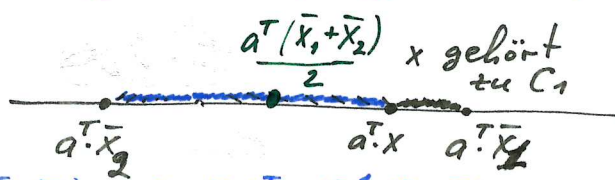
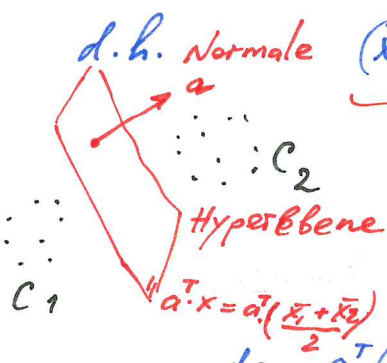
Fisher's Diskriminanzregel

d.h. Normale $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^T \cdot n \cdot W^{-1} (x - \frac{1}{2}(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)) > 0$

$$= a^T$$

$$\Rightarrow a = W^{-1} (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$$

Fisher's Diskriminanz



$$\begin{aligned} a^T \bar{x}_1 - a^T x &< a^T x - a^T \bar{x}_2 \\ 2a^T x &> a^T (\bar{x}_1 + \bar{x}_2) \\ a^T (x - \frac{1}{2}(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)) &> 0 \end{aligned}$$