

# Funktionelle Beschreibung der zeitlichen Entwicklung von Aktienwerten

Dr. Gert Beister (Berlin)  
gert@beister.com

Prof. Dr. Bernd Luderer, TU Chemnitz, Fakultät für Mathematik, 09107 Chemnitz  
bernd.luderer@mathematik.tu-chemnitz.de

**Zusammenfassung:** Mithilfe geeigneter, stückweise definierter Funktionen wird die zeitliche Entwicklung von Aktienwerten beschrieben und auf Einzelaktivitäten des Handelsprozesses zurückgeführt. Zwei einfache Beziehungen zwischen Aktienwert und seiner zeitlichen Veränderung einerseits sowie Stiumulusgeschwindigkeit und -beschleunigung andererseits, führen zu einer nichtlinearen Differentialgleichung erster Ordnung, die für den Fall konstanter Parameter einfache analytische Lösungen besitzt. Mit deren Hilfe werden ein „gleichmäßiger“ Handelsprozess definiert und charakteristische Beispiele berechnet. Die Methode wird durch Simulationsanpassung eines realen Beispiels, eines Zeitreihenausschnitts vom Frankfurt-Effekten-Fonds, demonstriert. Zusätzlich werden für einen allgemeinen Handelsprozess „störende“ Aktivitäten berücksichtigt, die Einfluss auf die Kaufstimulus-Beschleunigung haben könnten. Aus der daraus resultierenden nichtlinearen Differentialgleichung zweiter Ordnung ergeben sich Beschleunigungen des Wertzuwachses beim Kaufprozess bzw. der Wertminderung beim Verkauf – immer verbunden mit der Gefahr von Prozess-Instabilitäten, wie zum Beispiel Kursabstürzen. Manche der mathematischen Aussagen bieten aus ökonomischer Sicht Stoff zur Diskussion.

**Summary:** A mathematical method is presented, using functions stepwise defined over the time scale, which describes the development of share values on the base of detailed trading activities. Two simple relations, between the share value together with its time variation and the velocity or acceleration of trade stimulus, result in a non-linear first order differential equation, even providing simple analytical solutions in the case of constant parameters. With this equation a “steady” trading process can be defined, illustrated by characteristic examples. As a proof of the method, a fitting procedure on a real time series interval of the Frankfurt-Effekten-Fonds is demonstrated. Additionally to the steady trading process, “disturbing” activities can be taken into account, preferably in relationship to trade stimulus acceleration. From these a non-linear second order differential equation results, with solutions that also contain accelerated increases or diminished decreases of the share value during buying or selling, respectively - but in both cases with the implementation of possible destructive process instabilities, especially share value breakdowns. Some of the mathematical statements offer material for discussion from an economical point of view.

**Key words:** functional description of financial markets, forecast of share values, time series, hyperbolic functions

**Mathematics Subject Classification:** 34A12, 91G80, 97M30

**JEL Classification:** C02, C63, E47, G12, G17

# 1 Einleitung

Beim Aktienhandel stellt aus naheliegenden Gründen eine der interessantesten Fragen diejenige nach der zukünftigen Entwicklung der Preise dar. In den vergangenen Jahrzehnten konnten zu ihrer Beantwortung entscheidende Fortschritte mit Hilfe moderner statistischer Methoden der Mathematik erreicht werden. Diese liefern stochastische Aussagen, die aus der statistischen Analyse bereits vorliegender Zeitreihen, d. h. der zeitlichen Änderungen der jeweils betrachteten Aktienwerte resultieren. Einen anderen Zugang liefert die Technische Analyse<sup>1</sup>, die aus dem Erkennen bestimmter Muster des Aktienkursverlaufs qualitative (und teilweise auch quantitative) Schlussfolgerungen über den weiteren Verlauf der Kurse zieht; vgl. z. B. Kahn (2010); Murphy (1999). Es gibt zahlreiche weitere Zugänge zur Prognose von Aktienkursen – mithilfe von Zeitreihen, stochastischen Prozessen, neuronalen Netzen, Computersimulationen oder mittels Fundamentalanalyse. Exemplarisch sei auf Neusser (2009), Oitzl (2008), Sattler (1999) und Schlitter (2008) verwiesen.

Hier wird ein Versuch unternommen, die im Einzelprozess des Handels wirkenden Triebkräfte, die für jede Veränderung eines Aktienwertes verantwortlich sind, **funktionell** (und damit quantitativ) zu beschreiben. Tatsächlich lassen sich überraschend einfache Gleichungen finden, die – zumindest in entsprechend eingeschränktem Rahmen – Aussagen zur zeitlichen Entwicklung eines Aktienwertes beim Handel liefern. Als Basis dienen dabei simple Annahmen zur Beziehung zwischen Stimulusgeschwindigkeit sowie Stimulusbeschleunigung einerseits und dem Aktienwert und der Geschwindigkeit seiner zeitlichen Veränderung andererseits. Dies soll im Folgenden gezeigt werden.

Bei der Betrachtung von Zeitreihen der meisten Aktien fällt allgemein deren Zick-Zack-Form auf. Die grafische Darstellung zeigt de facto eine Aneinanderreihung von dreieckartigen Detailabschnitten, mit Anstiegen zu spitzen Maxima sowie entsprechenden Abfällen, die Seitenlinien von Dreiecken ähnlich sehen. Weiter unten wird dies an einem Beispiel demonstriert. Dieses Verhalten ist nicht nur kurzfristig zu beobachten, auch die Mitteilung einer solchen Kurve über mehrere Tage – oft sogar über Monate – ergibt das gleiche Bild. Gelegentliche Abweichungen von dieser idealisierten Form, wie etwa Abstürze der Aktienwerte, scheinen dabei auf Abweichungen vom „gleichmäßigen“ Kauf- und Verkaufsverhalten hinzuweisen. In diesem Zusammenhang ist die Definition eines gleichmäßigen Handelsprozesses von Interesse.

Im Folgenden werden für den Einzelprozess des Kaufs und Verkaufs von Aktien einfache mathematische Beziehungen formuliert. Dieser Ansatz führt zu einer Differentialgleichung, die für den Fall eines gleichmäßigen Handelsprozesses, mit wenigstens kurzzeitig konstanten Bedingungen, sogar analytische Lösungen besitzt. Für einen Handelsprozess mit „störenden Aktivitäten“ wird diese Gleichung anschließend um einen entsprechenden Zusatzterm ergänzt, der proportional zur Kaufstimulus-Beschleunigung wirken soll. Schließlich wird – am Beispiel eines Zeitreihenabschnittes des Frankfurt-Effekten-Fonds – durch Simulationsanpassung der Parameterwerte gezeigt, dass tatsächlich ein gleichmäßiger Handelsprozess vorliegt.

Für viele der mathematischen Aussagen wurde eine ökonomische Interpretation gegeben bzw. versucht. Manche der Aussagen harren allerdings noch einer Diskussion aus ökonomischer, verhaltenstheoretischer bzw. praktischer Sicht.

---

<sup>1</sup>Die Technische Analyse dient dazu, durch Untersuchung von Börsenkursen und verschiedenen Kennzahlen Vorhersagen über den zukünftigen Kursverlauf von Wertpapieren, Börsenindizes oder sonstigen Finanzhandelsobjekten herzuleiten.

## 2 Verwendete Größen

Untersuchungsobjekt sind eine bestimmte, nicht näher spezifizierte Aktie, ein Fonds oder ein Index. Im Weiteren werden folgende Größen benutzt, die später zur Beschreibung eines gleichmäßigen Handelsprozesses benötigt werden:

$M$	- <i>Basiswert</i> der Aktie – als (materielle) unantastbare Basis, vorrangig in der Wahrnehmung des Käufers, Unternehmenswert im weiteren Sinne; Maßeinheit: Euro
$W(t)$	- <i>Kurs/Aktienwert</i> der Aktie zur Zeit $t$ als Marktwert (in €); im Wesentlichen durch Angebot und Nachfrage bestimmt
$\frac{dW(t)}{dt}$	- <i>Wertgeschwindigkeit</i> ; mit einem Tag [d] als Zeiteneinheit wird diese Größe in €/d gemessen; Veränderung von $W(t)$
$S$	- <i>Sättigungswert</i> , Kusziel, persönlicher Erwartungswert für $W$
$K(t)$	- <i>Kaufstimulus</i> (für den Abnehmer von Aktien; Dimension: €)
$\frac{dK(t)}{dt}$	- <i>Stimulusgeschwindigkeit</i> ; täglicher Kaufstimulus (in €/d), proportional zur aktuellen Differenz $S - W(t)$ , gemäß unten gegebener Annahme 1; <i>Kauf</i> gemittelt über alle gleichzeitigen Handelsbewegungen zur Aktie; <i>Verkauf</i> von Aktien = Kauf mit negativem Vorzeichen
$\frac{d^2K(t)}{dt^2}$	- <i>Stimulusbeschleunigung</i> (in €/d <sup>2</sup> ); Änderung des täglichen Kaufstimulus mit der Zeit; die <i>treibende Kraft</i> , die eine solche Beschleunigung bewirkt, wird hier im „Kauftrieb“ eines Aktienkäufers gesehen; der Kauftrieb wird als proportional zur Kaufstimulus-Beschleunigung angenommen
$a$	- <i>Handelsfaktor</i> ; $a > 0$ , Dimension 1/d; Anteil von $S - W(t)$ , den der Käufer (oder Verkäufer) bereit ist, am betrachteten Tag für den Kauf der Aktie auszugeben (siehe Annahme 1)

In der Praxis gibt es noch weitere Einflüsse auf den Wert  $W(t)$ , die durch störende Aktivitäten hervorgerufen werden. Dazu zählen u. a. solche, die auf den Handelsprozess zusätzlich beschleunigend wirken (wie „Gier“, „Panik“ oder Ähnliches). Es wird angenommen, dass diese nicht ständig auftreten, sondern bevorzugt dann, wenn die Wertgeschwindigkeit zeitlich stark variiert. Dem soll eine weitere Größe entsprechen:

$$g \cdot \frac{d^2W(t)}{dt^2} \quad - \quad \text{störende Aktivität, als zusätzlich treibende Kraft bei der Kaufstimulus-Beschleunigung. Der „Störungsfaktor“ } g \text{ ist eine dimensionslose, positive Zahl.}$$

Die folgende Größe hat für den Start eines Handelsprozesses Bedeutung:

$$\alpha \quad - \quad \text{Angebotsaufschlag (dimensionslose, positive Zahl) als Zuschlag bei Beginn der Ausgabe (zur Zeit } t = 0\text{). Der Aktienwert liegt normalerweise immer oberhalb des Basiswertes. Der Kurs muss also mit } W(0) = M(1 + \alpha) \text{ starten.}$$

### 3 Annahmen zur Wechselwirkung

Für die gesuchte Darstellung eines Handelsprozesses werden relativ einfache Ansätze zur Wechselwirkung der soeben aufgezählten Größen formuliert.

#### Annahme 1:

Es besteht ein Zusammenhang zwischen der *Stimulusgeschwindigkeit*  $\frac{dK}{dt}$ , der „Kauf-Eile“ (nicht der Kaufmenge) und dem Abstand des Marktwertes  $W$  vom Kursziel  $S$ :

$$\frac{d}{dt}K(t) = a \cdot [S - W(t)]. \quad (1)$$

Die Stimulusgeschwindigkeit würde bei  $W(t) = S$  demnach gleich null werden oder – falls  $W$  bereits den Wert  $S$  überschritten haben sollte – negative Größen erreichen, was ein Überwiegen der Verkäufe bedeutet.

Der „Handelsfaktor“  $a$  hat in dieser Beziehung die Dimension 1/d. Wie auch die Parameter  $M$  und  $S$ , wird dieser hier als positive Größe und Konstante, also als zeitunabhängig betrachtet. Die Gleichung gilt damit nur in einem Zeitintervall, in dem diese zeitliche Konstanz hinreichend genau erfüllt ist. Beziehung (1) soll einen Kaufprozess beschreiben, der auf den Wert  $W(t)$  der betrachteten Aktie bezogen ist. Damit kann der Proportionalitätsfaktor  $a$  über einen längeren Zeitraum zur Charakterisierung des Kaufverhaltens der Aktienkäufer benutzt werden, als es unter Einbeziehung der täglich gehandelten Aktienzahl möglich wäre.

#### Annahme 2:

Die *Wertgeschwindigkeit*  $\frac{dW(t)}{dt}$  hängt vom Abstand zwischen aktuellem Wert  $W(t)$  und dem Basiswert  $M$ , aber auch von der Stimulusgeschwindigkeit ab. Für dieses Verhalten wird ebenfalls eine lineare Abhängigkeit unterstellt:

$$\frac{d}{dt}(W(t) - M) = \frac{W(t) - M}{M} \cdot \frac{d}{dt}K(t). \quad (2)$$

Die Bewegung von  $W$  mit  $\frac{dK}{dt}$  soll demnach umso stärker sein, je weiter sich der Wert  $W$  vom Basiswert  $M$  absolut und relativ entfernt hat.

Aus (1) folgt, dass die Wertgeschwindigkeit der *Kaufstimulus-Beschleunigung*  $\frac{d^2K(t)}{dt^2}$  entspricht. Für den Kaufstimulus  $K(t)$  ergibt sich damit aus (1) und (2) eine einfache Differentialgleichung. Hier interessieren jedoch vorrangig Aussagen zum Aktienwert  $W(t)$ . Deshalb wird im Weiteren die aus beiden Beziehungen folgende Gleichung für  $W(t)$  benutzt – eine nichtlineare Differentialgleichung erster Ordnung.

**Definition 1:** Ein Kaufs- oder Verkaufsprozess, bei dem der Aktienwert  $W(t)$  durch die Gleichungen (1) und (2) beschrieben wird, soll als *gleichmäßiger Handelsprozess* bezeichnet werden.

### Annahme 3:

Entsteht eine „Störung“ des Handelsprozesses, so soll die dafür verantwortliche Aktivität nur bei zeitlichen Variationen der Wertgeschwindigkeit auftreten und von deren Stärke abhängen. Sie soll ausschließlich als zusätzlicher Beitrag zur Kaufstimulus-Beschleunigung wirken, wie oben bei der Definition des Störungsfaktors  $g$  beschrieben wurde. Im Sinne einer möglichst einfachen Beziehung geschieht dies wiederum durch Addition, sodass jetzt Gleichung (1) durch die Beziehung

$$\frac{d^2K(t)}{dt^2} = a \cdot \frac{d}{dt}(S - W(t)) + g \cdot \frac{d^2W(t)}{dt^2} \quad (3)$$

ersetzt werden muss. Mit Gleichung (2) ergibt sich daraus für  $W(t)$  nun eine nichtlineare Differentialgleichung zweiter Ordnung.

**Definition 2:** Ein Kaufs- oder Verkaufsprozess, der durch die Gleichungen (2) und (3) beschrieben wird, soll *allgemeiner Handelsprozess* genannt werden.

## 4 Differentialgleichung für gleichmäßige Handelsprozesse

Aus den Gleichungen (1) und (2) folgt für einen gleichmäßigen Handelsprozess die Beziehung

$$\frac{dW(t)}{dt} + \frac{a}{M} \cdot (W(t))^2 - a \cdot \left(1 + \frac{S}{M}\right) \cdot W(t) + a \cdot S = 0, \quad (4)$$

eine einfache nichtlineare Differentialgleichung erster Ordnung für  $W(t)$ . Mit  $y(t) = W(t)$  und  $y' = \frac{dy}{dt}$  kann Gleichung (4) vereinfacht geschrieben werden als

$$y' + \frac{a}{M} \cdot y^2 - a \cdot \left(1 + \frac{S}{M}\right) \cdot y + a \cdot S = 0. \quad (5)$$

Bei Zeitunabhängigkeit der Konstanten  $M$ ,  $S$  und  $a$  besitzt diese Differentialgleichung für  $y(t)$  die analytischen Lösungen<sup>2</sup>

$$y_{1a}(t) = M \quad \text{oder} \quad y_{1b}(t) = S \quad \text{für } y'(t) = 0, \quad (6)$$

also die Parameter  $M$  und  $S$  selbst, sowie

$$\frac{1}{M} \cdot y_2(t) = 1 + b \cdot [1 + \tanh ab(t - t_0)] \quad \text{für } y'(t) > 0 \quad (7)$$

und

$$\frac{1}{M} \cdot y_3(t) = 1 + b \cdot [1 + \coth ab(t - t_0)] \quad \text{für } y'(t) < 0, \quad (8)$$

wobei die Abkürzung  $b = \frac{1}{2} \left( \frac{S}{M} - 1 \right)$  verwendet wurde und die angegebenen Bedingungen für  $y'(t)$  über den gesamten Zeitraum gelten sollen. Unterstellt man sinnvollerweise  $S > M$ , so gilt  $b > 0$ . Zur Herleitung der Beziehungen (7) und (8) siehe Anhang.

Die beiden Konstanten  $M$  und  $S$  sind als Lösungen für  $y(t) = W(t)$  uninteressant. In den beiden anderen Lösungsfunktionen wird die Zeitabhängigkeit über den hyperbolischen Tangens ( $\tanh$ ) beziehungsweise den hyperbolischen Kotangens ( $\coth$ ) bewirkt, die

---

<sup>2</sup>Eine Beschreibung der Hyperbelfunktionen findet sich im Anhang.

Zeitkonstanten  $t_0$  in ihren Argumenten bestimmen sich aus den Anfangsbedingungen des jeweils vorliegenden Problems. Die Zeit  $t$  wird nur in positiver Richtung gezählt. Einige Erläuterungen zu den Funktionen  $\tanh$  und  $\coth$  werden im Anhang gegeben.

Da die Parameter  $M$ ,  $S$  und  $a$  ebenfalls positive Größen sind, ergibt sich daraus generell, dass die Funktionen  $y_2(t)$  mit dem hyperbolischen Tangens nur dann die Gleichung (4) lösen, wenn ihre zeitliche Ableitung  $y'_2(t) = \frac{dy_2(t)}{dt}$  für alle Zeitpunkte  $t$  positiv ist, sie selbst also einen Anstieg von  $W(t)$  im Laufe der Zeit beschreiben. Die Funktionen  $y_3(t)$  müssen dagegen eine negative Ableitung besitzen und stehen daher für einen zeitlichen Abfall. Im Falle einer verschwindenden Ableitung gäbe es nur dann eine Lösung, wenn  $y(t)$  den Wert  $S$  oder  $M$  gemäß (6) erreichen könnte. Im Allgemeinen wird es daher keinen stetig differenzierbaren Übergang zwischen  $y_2(t)$  und  $y_3(t)$  geben, sondern nur die bereits erwähnten „Dreiecksspitzen“.

## 5 Gleichmäßiger Handelsprozess als Serie von Anfangswertproblemen

### 5.1 Einfacher Handelsprozess mit Kaufs- und Verkaufsperiode

Nimmt man an, dass ein Handelsprozess wenigstens eine gewisse Zeit lang konstante Parameter aufweist, so kann für diesen Zeitraum unter den Funktionen  $y(t)$  gemäß (7) und (8) nach solchen gesucht werden, die sowohl die Differentialgleichung (4) bzw. (5) als auch (mit ihren Startwerten) die jeweiligen Anfangsbedingungen des betrachteten Zeitraums erfüllen, also insgesamt das entsprechende Anfangswertproblem lösen. Eine Zerlegung von Zeitreihen in aufeinanderfolgende Phasen mit konstanten – und i. Allg. voneinander verschiedenen – Parametern ist in der Praxis tatsächlich näherungsweise möglich, wie weiter unten für einen markanten Ausschnitt eines realen Beispiels gezeigt werden wird.

Im Interesse einer anschaulichen Darstellung werden zunächst zwei einfache theoretische Fälle beschrieben: Im ersten Fall wird ein einfacher gleichmäßiger Handelsprozess betrachtet, der ein überwiegendes Kaufverhalten mit zeitlich anschließender Verkaufsperiode beschreibt. Der Kaufprozess, hier als Anfangswertproblem **A** bezeichnet, wird dabei bis zu einer gewissen Zeit  $t_1$  wirksam sein, d. h. bis zu einer plötzlichen Verringerung des Kursziels  $S$ . Der dann kleinere Sättigungswert  $S_1$  (neues Kursziel) erfordert für den Zeitabschnitt  $t \geq t_1$  ein neues Anfangswertproblem **B** mit einem zeitlichen Wertebaufall als einziger Lösung für  $W(t)$  und beschreibt somit einen Handelsabschnitt mit überwiegender Verkaufscharakter. Im zweiten Fall wird ein gleichmäßiger Handelsprozess behandelt, der aus drei aufeinanderfolgenden Anfangswertproblemen **A**, **B** und **C** besteht, im letzten Problem sogar mit der Möglichkeit eines „Absturzes“ der Aktienwerte (trotz hier noch fehlender störender Aktivitäten).

#### 5.1.1 Fall 1: Anfangswertproblem **A**

Der Beginn des Handelsprozesses wird auf den Tag der Aktienausgabe gelegt werden, also auf  $t = 0$ , mit einem Startwert  $W(0)$ , der größer als  $M$  ist. Damit ergibt sich

$$y_A(0) = W(0) = M(1 + \alpha) \quad \text{unter der Bedingung} \quad \frac{S}{M} > \frac{W(t)}{M} \geq (1 + \alpha) \quad (9)$$

als Anfangswert für den ersten Zeitabschnitt **A**, wobei  $\alpha > 0$  ist.

Bedingung (9) soll in diesem ersten Beispiel für den Start bei der Emission (d. h. zur Zeit  $t = 0$ ) gelten.<sup>3</sup> Der Spezialfall  $\alpha = 0$  (Ausgabe zum Basiswert) würde nur die „Lösung“  $W(t) = M$  ergeben, d.h. eine Konstante und damit nichts Realistisches.<sup>4</sup>

Die Anfangsbedingung (9) bewirkt eine mit der Zeit ansteigende Lösung  $W(t)$ , weil  $S > W$  gemäß Gleichung (1) eine positive Stimulusgeschwindigkeit  $\frac{dK(t)}{dt}$  bedeutet und  $W(t) > M$  damit laut Gleichung (2) ein positives  $\frac{dW(t)}{dt}$  verlangt.

Als Lösung kommt daher nur die Funktion  $y_2(t)$  gemäß (7) in Betracht:

$$\frac{1}{M} \cdot y_{2A}(t) = 1 + b \cdot [1 + \tanh ab(t - t_0)]. \quad (10)$$

Die Zeitkonstante  $t_0 > 0$  ergibt sich aus der Anfangsbedingung  $y_{2A}(0) = M(1 + \alpha)$  zu

$$t_0 = -\frac{1}{ab} \cdot \operatorname{artanh} \left\{ \left[ \frac{1}{M} \cdot y_{2A}(0) - 1 \right] \cdot \frac{1}{b} - 1 \right\} = -\frac{1}{ab} \cdot \operatorname{artanh} \left[ \frac{\alpha}{b} - 1 \right]. \quad (11)$$

**Begründung:** Für  $t = 0$  (Emissionszeitpunkt in diesem Beispiel) ergibt die Lösung (7) mit der Anfangsbedingung (9)

$$\frac{1}{M} \cdot y_2(0) = 1 + b[1 + \tanh(a \cdot b \cdot (0 - t_0))] = 1 + \alpha$$

bzw. (da der Hyperbeltangens eine ungerade Funktion ist)

$$b \cdot [1 - \tanh(a \cdot b \cdot t_0)] = \alpha \quad \text{oder} \quad \tanh(a \cdot b \cdot t_0) = 1 - \frac{\alpha}{b}$$

und damit

$$t_0 = \frac{1}{ab} \cdot \operatorname{Artanh} \left( 1 - \frac{\alpha}{b} \right).$$

Da auch der Areatangens<sup>5</sup> eine ungerade Funktion ist, resultiert hieraus Beziehung (11).

Wenn die Parameter für alle Zeiten konstant bleiben würden, dann würde der Wert  $W(t)$  gemäß (10) mit zunehmender Zeit  $t$  monoton steigen und sich für  $t \rightarrow \infty$  asymptotisch dem Kursziel  $S$  nähern. Entsprechend Gleichung (1) bedeutet dieses Verhalten eine zwar mit der Zeit abnehmende, aber stets positive Stimulusgeschwindigkeit, also insgesamt ein Überwiegen des Kaufverhaltens – der Handelsprozess ist im Wesentlichen ein Kaufprozess.

In der Praxis sind jedoch während des Handelsprozesses Veränderungen der Einschätzungen, Meinungen und Strategien (und damit der Parameter) zu erwarten. Zunächst interessiert ein mögliches Erlahmen des Kaufinteresses bei den Marktteilnehmern, speziell die Abnahme des erwarteten Sättigungswertes (des Kursziels)  $S$  nach einer gewissen Zeit  $t_1$ . Der „Marktteilnehmer“ ist dabei als Mitteilung über das Verhalten aller zur gleichen Zeit Handelnden zu verstehen. Das Anfangswertproblem **A** wird auf den Zeitraum  $0 \leq t \leq t_1$  (mit konstanten Parametern) beschränkt, ebenso die Lösung  $y_{2A}$  entsprechend (10). Der erste Abschnitt endet somit – noch vor Erreichen des alten Kursziels  $S$  – mit dem Abbruchwert  $W(t_1) = \beta S$ ,  $0 < \beta < 1$ .

<sup>3</sup>Für ein beliebiges späteres Anfangswertproblem, das auf ein vorhergehendes folgt, sind auch andere Bedingungen möglich, wie  $S < W(t)$  oder  $S < M$  (z. B. in Abschnitt 5.2).

<sup>4</sup>Umgekehrt könnte man daraus folgern: „Es gibt keine Emission zum Basiswert, immer nur eine solche mit einem gewissen Aufschlag.“

<sup>5</sup>Der Areatangens (Area tangens hyperbolicus) ist die Umkehrfunktion des Hyperbeltangens.

### 5.1.2 Fall 2: Anfangswertproblem B

Das sich anschließende Anfangswertproblem **B** (für  $t \geq t_1$ ) mit einem nun geringeren Kursziel  $S_1 < W(t_1) = \beta S$ <sup>6</sup> beginnt mit dem Endwert des Problems **A** als neuem Startwert:

$$y_B(t_1) = y_{2A}(t_1) = W(t_1) = \beta S. \quad (12)$$

Setzt man  $y_B(t_1) = \beta_1 S_1$ , so folgt aus  $S_1 < \beta S$  die Beziehung  $\beta_1 = \frac{\beta S}{S_1} > 1$ . Der Start des Anfangswertproblems **B** erfolgt daher mit einem Faktor  $\beta_1 > 1$ , bezogen auf das neue Kursziel  $S_1$ . Außerdem wird  $a_1 \neq a$  zugelassen, die Handelsfaktoren dürfen also in beiden Zeitbereichen verschieden sein.<sup>7</sup>

Mit der eben beschriebenen Anfangsbedingung ergibt sich als einzige Lösung für das Anfangswertproblem **B** eine Funktion  $y_3(t)$  gemäß (8), die im Laufe der Zeit monoton fällt:

$$\frac{1}{M} \cdot y_{3B}(t) = 1 + b_1 \cdot [1 + \coth a_1 b_1 (t - t_{01})] \quad (13)$$

für  $t > t_{01}$  und mit  $b_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{S_1}{M} - 1 \right)$ .

Das Argument des hyperbolischen Tangens muss dabei positiv sein, was bedeutet, dass hier die Abnahme des positiven Astes des coth mit zunehmender Zeit  $t$  wirksam wird. Die Zeitkonstante  $t_{01}$  folgt aus der Anpassungsbedingung  $y_B(t_1) = y_{2A}(t_1)$ . Sie beträgt

$$t_{01} = t_1 - \frac{1}{a_1 b_1} \cdot \operatorname{arcoth} \left[ \left( \frac{y_{2A}(t_1)}{M} - 1 \right) \cdot \frac{1}{b_1} - 1 \right]. \quad (14)$$

### 5.1.3 Zahlenbeispiel zu den Lösungen $y_{2A}(t)$ und $y_{3B}(t)$

Ein Beispiel soll den Funktionsverlauf für  $W(t)$  in den beiden sequentiellen Anfangswertproblemen **A** und **B** illustrieren. In beiden werden gleiche Basiswerte  $M$  vorausgesetzt, was eine vereinfachte Darstellung mittels der relativen Lösungen  $\frac{y(t)}{M}$ , ohne konkrete Wahl von  $M$ , erlaubt.

**Beispiel 1:** Im Problem **A** sollen folgende Parameterwerte gelten:

$a = 5\%/\text{d} = 0,05/\text{d}$  – Kauf von 5 % des Wertes  $S - W(t)$  pro Tag

$\alpha = 10\% = 0,1$

$S = 2M$

$\beta = 0,9$  – Abbruchfaktor am Ende des ersten Abschnitts (in  $t_1$ )

Diese Größen ergeben zunächst  $b = \frac{1}{2}$ . Ferner führen sie unter Beachtung von Beziehung (11) zur Zeitkonstanten  $t_0 = 43,9$  [d] und über den Ausdruck (10) für  $y_{2A}(t)$  sowie die Bedingung  $y_{2A}(t_1) = \beta S$  gemäß (12) zur Abbruchzeit  $t_1 = 71,6$  [d].<sup>8</sup>

<sup>6</sup>Der „Kaufstopp“-Faktor  $\beta$  ist im Folgenden kein Rechenparameter, der die Lösung beeinflusst, sondern nur eine Information zum Anteil am jeweiligen Kursziel  $S$  am Ende bzw. Anfang des entsprechenden Anfangswertproblems.

<sup>7</sup>Die Indizes „1“ bei den Parametern  $S$ ,  $a$  und  $\beta$  weisen auf das neue Anfangswertproblem **B** hin.

<sup>8</sup>Wäre die Zeit  $t_1$  festgelegt worden, wie zum Beispiel bei den unten beschriebenen Simulationsanpassungen realer Zeitreihen, dann hätte sich daraus der Anteil  $\beta$  als rein informative Größe ergeben.

Im zweiten Problem **B** wird eine Verkleinerung des Kursziels auf  $S_1 = 1,2M < \beta S = 1,8M$  angenommen, der Handelsfaktor wird – zur Vereinfachung – als unverändert betrachtet, d. h.  $a_1 = a = 0,05$ . Mit diesen Zahlen ergibt sich gemäß (14) die Zeitkonstante  $t_{01} = 43,2$  [d].

In Abb. 1 sind die beiden Lösungen  $y_{2A}(t)$  und  $y_{3B}(t)$  für das konkrete Zahlenbeispiel dargestellt. Um den Einfluss des Handelsfaktors  $a$  zu illustrieren, enthält die Grafik außerdem ein weiteres Lösungspaar  $y_{2A}^*(t)$  und  $y_{3B}^*(t)$ , für welches ein kleinerer Wert  $a_1 = a = 1,5\%/\text{d}$  angesetzt wurde.

Die Abbildung veranschaulicht, dass der Aktienwert  $W(t)$  nach dem Start mit der Zeit  $t$  kontinuierlich ansteigt, aber immer unterhalb des Kursziels  $S$  bleibt. Gäbe es keine Änderung der Handelsparameter, so würde dieser Prozess über alle Zeiten bis zur asymptotischen Annäherung von  $W(t)$  an  $S$  laufen (in Abb. 1 weisen die gestrichelten Linien darauf hin). Weil in der Lösung (10) im Startzeitpunkt  $t = 0$  der Hyperbeltangens mit dem negativen Argument  $-0,025 \cdot t_0$  beginnt, bewegt er sich mit zunehmender Zeit  $t$  durch den Nullpunkt des Arguments hin zu positiven Werten. Beim Argumentwert null durchläuft er den Punkt seiner größten Steilheit. Diese maximale Kauffreudigkeit wird hier also bei  $t = t_0$  erreicht, d. h. rund 44 Tage nach der Emission.<sup>9</sup>

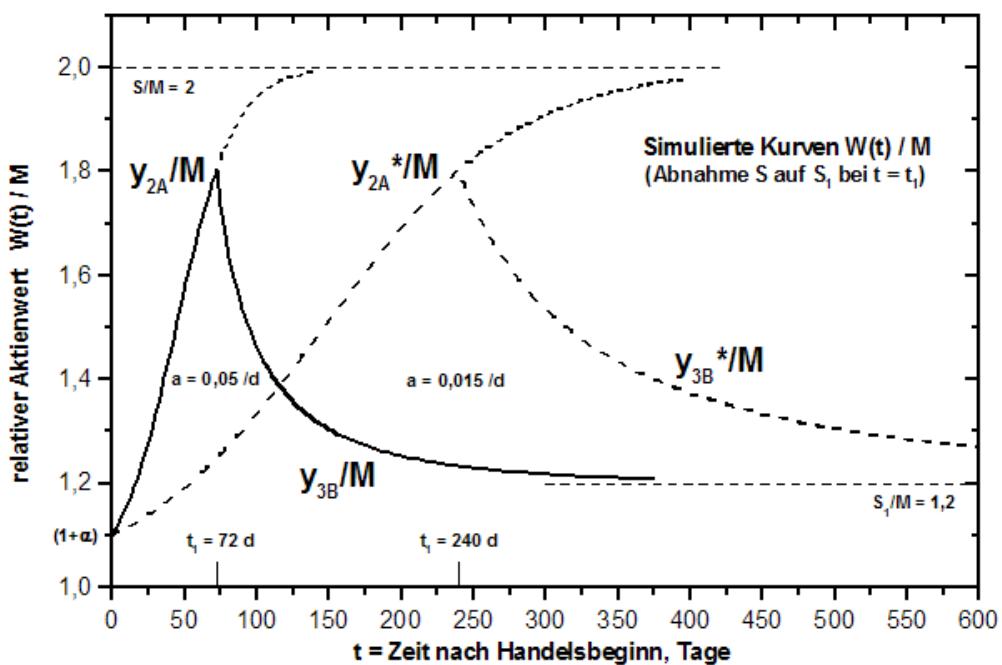


Abbildung 1: Zwei gleichmäßige Handelsprozesse mit Kaufs- und Verkaufsperiode

Mit Absenkung des Kursziels von  $S = 2M$  auf  $S_1 = 1,2M$  setzt bei  $t = t_1$  eine Wertminderung ein, die unter Umständen über einen ausgedehnten Zeitraum ähnlich dem des Kaufprozesses läuft. Zu diesem Zeitpunkt beginnt für  $W(t)$  ein abrupter Abfall, der jedoch mit zunehmender Zeit wieder in eine asymptotische Annäherung an den (nun kleineren) Sättigungswert übergeht, diesmal aber von dem höheren Betrag  $\beta S = 1,8M$

<sup>9</sup>Mit den in Beispiel 1 gewählten Parametern  $a = 0,05/\text{d}$  und  $S = 2M$  ergeben sich  $b = 0,5$  und  $ab = 0,025/\text{d}$ . Bei  $t = 0$  (Emissionszeitpunkt) ist in der Lösung  $\frac{1}{M} \cdot y_2(0) = 1 + b \cdot [1 + \tanh(-a \cdot b \cdot t_0)] = 1 + b[1 + \tanh(-0,025 \cdot t_0)]$  das Argument des Hyperbeltangens negativ. Mit zunehmender Zeit bewegt sich also in der Lösung  $\frac{1}{M} \cdot y_2(t) = 1 + b \cdot [1 + \tanh 0,025 \cdot (t - t_0)]$  der Hyperbeltangens durch seinen Nullpunkt bei  $t = t_0 = 43,9$  d.

her. Gemäß Gleichung (1) ist jetzt die Stimulusgeschwindigkeit negativ, es dominiert nun das Verkaufsverhalten.

Es zeigt sich auch, dass dieses asymptotische Verhalten nur dann wirksam werden kann, wenn der Prozess **B** selbst genügend lange dauert, das heißt, wenn die neuen Parameter hinreichend lange konstant bleiben. Andernfalls, bei erneuter Veränderung von mindestens einem Parameter (in der Praxis wohl einer weiteren Erhöhung der Verkaufsgeschwindigkeit oder einer zusätzlichen Abnahme des Kursziels), müsste zum Zeitpunkt dieser Änderung ein neues Anfangswertproblem beginnen.

Der Übergang bei  $t = t_1$  ist mit einem Sprung der Wertgeschwindigkeit  $\frac{dW(t)}{dt}$  verbunden, es gibt keine allmähliche Änderung.  $W(t)$  ist also bei  $t = t_1$  nicht stetig differenzierbar. Beide Lösungen zusammen – der Ast von  $y_{2A}(t)$  bis zu  $t = t_1$  und  $y_{3B}(t)$  daran anschließend – ergeben damit einen Verlauf  $W(t)$ , wie er tatsächlich beim Aktienhandel beobachtet werden kann: die eingangs genannte „Dreiecksflanke“.

## 5.2 Gleichmäßiges Handelsverhalten mit möglichen Aktienkursstürzen

Das oben betrachtete Beispiel veranschaulichte das interessanteste Problem eines Handelsprozesses – den Übergang von einem überwiegenden Kaufverhalten in einen dominierenden Verkauf. Dabei blieb noch die Frage offen, ob es unter den Bedingungen eines gleichmäßigen Handelsverhaltens gemäß Definition 1 (ohne Störungen in der oben diskutierten Bedeutung) auch zu Aktienkursstürzen kommen kann, das heißt zu Wertabnahmen, die sich zeitlich steigern und nicht zu schließlich „auffangenden“ Asymptoten führen, wie es im vorigen Beispiel – selbst bei Aneinanderreihung mehrerer Anfangswertprobleme **B** mit jeweils sinkendem  $S$  – der Fall sein würde.

Einen solchen Absturz könnten nur Lösungen  $y_3(t)$  der Differentialgleichung (4) beschreiben, wenn sich das Argument ihres hyperbolischen Kotangens mit zunehmender Zeit  $t$  dem Wert null nähert, er selbst also in Richtung auf seinen Pol benutzt wird. Im vorigen Beispiel entfernte sich das positive Argument mit der Zeit vom Nullpunkt weg.

Derartige Möglichkeiten sollen nun mit einem weiteren Anfangswertproblem **C** untersucht werden, welches sich wieder an ein davor gelagertes Problem anschließt, zu einem Zeitpunkt  $t = t_{E1}$  mit dem Wert  $W(t_{E1}) = y_{E1}$ . Bei diesem Übergang muss somit für die Lösung  $y_{3C}(t)$  des Problems **C** der Anfangswert in  $t_{E1}$  gerade  $y_{E1}$  betragen. Die Parameter werden jetzt unterschiedlich gewählt:  $S_2 \neq S_1$ ,  $M_2 \neq M_1$  und  $a_2 \neq a_1$ .<sup>10</sup> In der möglichen Lösung

$$\frac{1}{M_2} \cdot y_{3C}(t) = 1 + b_2 [1 + \coth a_2 b_2 (t - t_{02})] \quad (15)$$

mit  $a_2 b_2 (t - t_{02}) \neq 0$  bedeutet die nun zu suchende Annäherung an den Pol

$$t_{02} > t \quad (16)$$

und damit ein entgegengesetztes Verhalten zur Bedingung  $t > t_{01}$  bei der Lösung  $y_{3B}(t)$  des Anfangswertproblems **B** im vorigen Abschnitt. Die Konstante  $b_2$  wird hier analog zu oben durch  $b_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{S_2}{M_2} - 1 \right)$  definiert. Die Zeitkonstante  $t_{02}$  folgt aus Beziehung (14), nur jetzt mit den neuen Parametern  $M_2$ ,  $S_2$  und  $a_2$  sowie  $y(t_{E1}) = y_{E1}$ :

$$t_{02} = t_{E1} - \frac{1}{a_2 b_2} \cdot \operatorname{arcoth} \left[ \left( \frac{y_{E1}}{M_2} - 1 \right) \cdot \frac{1}{b_2} - 1 \right]. \quad (17)$$

---

<sup>10</sup>Der Index „2“ bezeichnet das Problem **C** und „1“ das vorhergehende Anfangswertproblem.

Wegen der Einschränkung  $t_{02} > t > t_{E1}$  gemäß (16) müsste nun für das Auftreten eines Absturzes in (17) das Argument des arcoth für  $b_2 > 0$  negativ und kleiner als  $-1$  sein sowie für  $b_2 < 0$  positiv und größer als  $+1$ . Das ergibt folgende Bedingungen:

$$\begin{aligned} y_{E1} < M_2 &\quad \text{für } b_2 > 0 \quad (\text{bzw. } S_2 > M_2), \\ S_2 > y_{E1} &\quad \text{für } b_2 < 0 \quad (\text{bzw. } S_2 < M_2). \end{aligned} \tag{18}$$

Im letzten Fall ist zu beachten, dass für ein positives Argument des arcoth wegen  $b_2 < 0$  auch  $\frac{y_{E1}}{M_2} - 1 < 0$  gelten und der Absolutbetrag von beiden kleiner eins sein muss.

Mit  $S_2 > M_2$  (bei positivem  $b_2$ ) folgt aus (18) die Forderung

$$y_{E1} < M_2 < S_2 \quad \text{für } b_2 > 0$$

und für  $S_2 < M_2$  (für negatives  $b_2$ ) entsprechend (18) zusätzlich die Forderung  $y_{E1} < S_2$ , also insgesamt

$$y_{E1} < S_2 < M_2 \quad \text{für } b_2 < 0.$$

Zur Möglichkeit von Abstürzen kann somit festgestellt werden:

- Abstürze kann es nur bei Erhöhung des Basiswertes  $M_2$  über den Abbruchwert  $y_{E1}$  hinaus geben, also bei  $M_2 > y_{E1}$ . Dabei darf dann  $S_2 > M_2$  oder  $S_2 < M_2$  sein, lediglich  $b_2 \neq 0$  ist einzuhalten.<sup>11</sup>
- Gleichzeitige Abnahme von Basiswert und Kursziel auf  $M_2 < M_1$  und  $S_2 < S_1$  führt bei einem gleichmäßigen Handelsprozess zu keinem Absturz – hierfür gibt es keine entsprechende Lösung des Anfangswertproblems (da die oben beschriebenen Bedingungen, unter denen Abstürze auftreten können, nicht erfüllt sind).

In Abb. 2 ist eine simulierte Zeitreihe dargestellt, die aus drei aufeinanderfolgenden Anfangswertproblemen besteht und im letzten auch eine Absturz-Variante enthält.

Der erste Teil, d. h. das erste Anfangswertproblem, entspricht wieder dem in Punkt 5.1.1 behandelten Problem **A**, mit Abbruch zum Zeitpunkt  $t = t_1$ . Auch die Parameter  $M = 100$  [€],  $S = 200$  [€] und  $a = 5,0\%$  werden übernommen, ebenso  $\beta = 0,9$  und damit  $t_1 = 72$  [d]. Die Lösungsfunktion ist wiederum  $y_{2A}(t)$  aus Abschnitt 5.1.

Im zweiten Teil wird – analog zu obigem Problem **B** – das Kursziel gesenkt, diesmal jedoch tiefer bis auf  $S_1 = 80$  [€] (anstelle von 120 [€]). Zusätzlich werden ein höherer Handelsfaktor  $a_1 = 7,0\%$  und auch eine Abnahme des Basiswertes auf den Wert  $M_1 = 70$  [€] angenommen. Mit letzterer Veränderung soll darauf hingewiesen werden, dass selbst ein Basiswert  $M$  nicht unbedingt „unantastbar“ sein muss, dass letztlich auch er nur eine Größe in der Wahrnehmung der Händler ist. Die Lösungsfunktion  $y_3(t)$ , in diesem Teil mit  $y_{3B}(t)$  bezeichnet, zeigt das schon von Problem **B** her bekannte Verhalten:  $W(t)$  sinkt mit der Zeit in Richtung zur Asymptote  $S_1$ . Dieser Prozess wird zur Zeit  $t_{E1} = 130$  [d] unterbrochen. Dort hat  $W(t_{E1})$  den Wert  $y_{3B}(t_{E1}) = y_{E1} = 90,37$  [€].

Im dritten Teil **C** werden vier Varianten einer möglichen Fortsetzung des vorangegangenen Anfangswertproblems demonstriert:

1. Beibehaltung der Parameter, d. h.  $S_2 = S_1$ ,  $M_2 = M_1$  und  $a_2 = a_1$ , was zu einer direkten Weiterführung der Lösung  $y_{3B}(t)$  führt (das dritte Anfangswertproblem bedeutet einfach nur eine zeitliche Ausweitung des zweiten).

---

<sup>11</sup>Der Versuch einer ökonomischen Interpretation findet sich am Ende dieses Abschnitts.

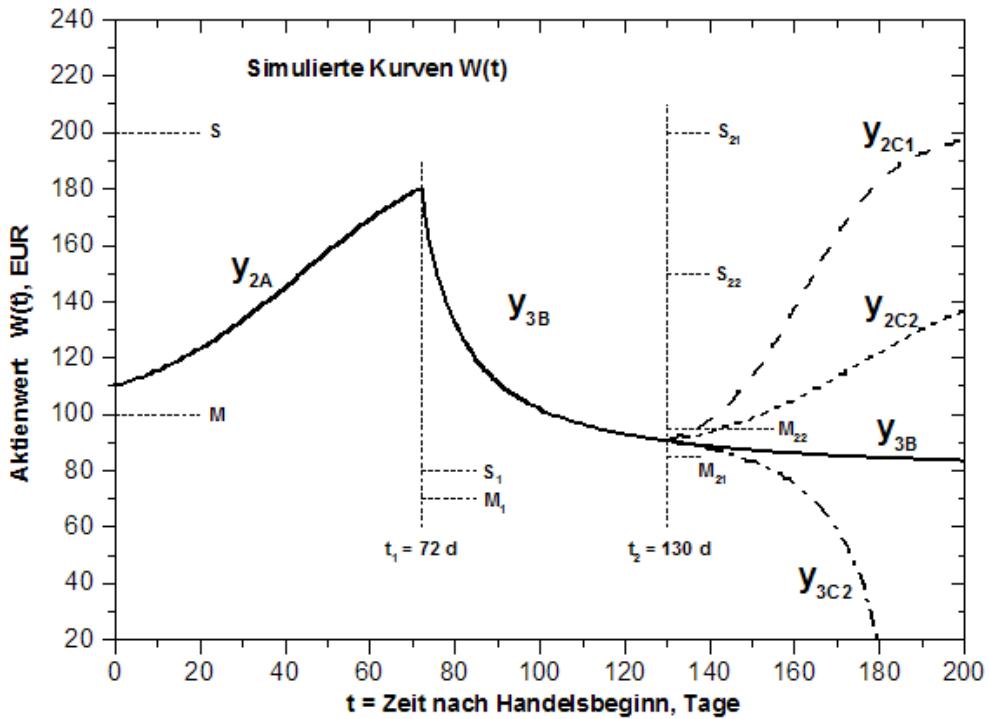


Abbildung 2: Gleichmäßiger Handelsprozess über drei Zeitabschnitten mit unterschiedlichen Kurszielen (S) und Basiswerten (M)

2. Bei Behaltung des Parameters  $a_2 = a_1$ , aber Erhöhung des Kursziels auf  $S_{21} = 200$  [€] und des Basiswertes auf  $M_{21} = 85$  [€], also auf einen größeren Wert als  $M_1$  (jedoch noch unterhalb von  $y_{E1} = 90,37$  [€]). Die dazugehörige Lösung  $y_{2C1}(t)$  verhält sich wie erwartet – wegen des jetzt höheren Kursziels steigt der Wert  $W(t) = y_{2C1}(t)$ , nach seinem Abfall im vorangegangenen Zeitabschnitt nun für  $t > t_{E1}$  wieder an.
3. Benutzung der gleichen Parameter  $a_2$  und  $M_{21}$  wie in der vorigen Variante, aber mit einer geringeren Erhöhung des Kursziels auf  $S_{22} = 150$  [€]. Die dazugehörige Lösung  $y_{2C2}(t)$  zeigt auch den erwarteten Werteanstieg, jetzt aber schwächer als vorher, entsprechend  $S_{22} < S_{21}$ .
4. Gleichung (4) enthält aus mathematischer Sicht auch eine Möglichkeit von Kursabstürzen für einen gleichmäßigen Handelsprozess, allerdings nur unter unrealistischen Verhältnissen. Ob eine solche Möglichkeit wirklich existiert, kann von den Autoren nicht eingeschätzt werden: Weiternutzung der Parameter  $a_2$  und  $S_{22}$  aus der vorigen Variante, aber mit Erhöhung des Basiswertes auf  $M_{22} = 95$  [€], also einen Betrag, der (etwas) über dem Abbruchwert  $y_{E1} = 90,37$  [€] liegt. Die zugehörige Lösung  $y_{3C2}(t)$  zeigt einen „Werteabsturz“!

Abschließend soll versucht werden, die hier gefundene Möglichkeit eines Absturzes zu deuten. Es erscheint zunächst merkwürdig, dass nach einem Wertabfall während eines gleichmäßigen Handelsprozesses, wie hier im zweiten Zeitabschnitt gezeigt, die Funktion  $y_{3C2}(t)$  nach erneuter Anhebung des Kursziels  $S$  auf einen Kursabsturz zielt, und das nur, weil der Basiswert  $M$  gleichzeitig erhöht wird und dabei den Abbruchwert  $y_{E1}$  übertrifft. Dafür könnte es diese Gründe geben:

- Den Entschluss des Händlers, beim Verkauf (wie hier im zweiten Zeitabschnitt) zu

bleiben, selbst wenn inzwischen – ob real oder nur in seiner Wahrnehmung – der „materielle“ Basiswert  $M$  und damit womöglich auch sein eigenes Kursziel  $S$  gestiegen sein sollten. Dieses Verhalten wäre mit einer gewissen „Panikreaktion“ vergleichbar.

- Die Benutzung des Basiswertes  $M$  als tatsächliche reale Grundlage, deren Sinken im zweiten Zeitabschnitt (gegenüber dem ersten) dann als Kapitalentzug verstanden werden müsste. Das wäre auch in Übereinstimmung mit dem besonders starken Wertabfall im zweiten Abschnitt. Beim „Erholungsprozess“ im dritten Abschnitt mit erhöhtem erwarteten Kurs  $S$ , der sonst ein gesteigertes Kaufinteresse bewirken müsste, wäre nun die neue Kapitalzufuhr (Erhöhung von  $M$ ) zu stark und zu früh erfolgt, sie hätte also anfangs noch unter dem Abbruchwert  $y_{E1}$  liegen sollen.

- Weitere Gründe sind denkbar.

Bei allem soll noch einmal darauf hingewiesen werden, dass obige Absturzbedingungen noch immer Bestandteil eines gleichmäßigen Handelsprozesses gemäß Definition 1 sind.

## 6 Berücksichtigung störender Aktivitäten im Handelsprozess

### 6.1 Differentialgleichung 2. Ordnung für den allgemeinen Handelsprozess

Zur Berücksichtigung störender Einflüsse beim Kauftrieb im bis dahin gleichmäßigen Handelsprozess wurde in Abschnitt 3 eine additive Ergänzung des Ausdrucks für die Kaufstimulus-Beschleunigung  $\frac{d^2K(t)}{dt^2}$  vorgenommen, vgl. Gleichung (3). Aus den Gleichungen (2) und (3) ergibt sich als neue Differentialgleichung für  $W(t)$  die Beziehung<sup>12</sup>

$$y''[g(y - M) - M] = a \cdot (y - M) \cdot y' - \frac{M}{y - M} \cdot y'^2 \quad (19)$$

mit den Abkürzungen  $y = W(t)$ ,  $y' = \frac{dy}{dt}$  und  $y'' = \frac{d^2y}{dt^2}$ . Der durch die nichtlineare Differentialgleichung zweiter Ordnung (19) beschriebene Prozess ist gemäß Definition 2 ein allgemeiner Handelsprozess.

Im Gegensatz zum gleichmäßigen Handelsprozess, der gemäß (4) noch mit einer Differentialgleichung erster Ordnung auskam, ist hier für  $W(t)$  bei Einbeziehung der Störung eine nichtlineare Differentialgleichung zweiter Ordnung entstanden – obwohl auch hier wieder für die zusätzliche Größe der denkbar einfachste Ansatz gewählt wurde.

Für  $g = 0$  geht die Gleichung in die Beziehung (4) des gleichmäßigen Handelsprozesses über (vgl. Definition 1), wie man durch einige Umformungen zeigen kann (siehe Anhang 4).

Bereits aus der Differentialgleichung (19) selbst kann man die Möglichkeit von Instabilitäten erkennen, die in den Funktionen  $y(t)$  bei  $g > 0$  durch unbegrenztes Wachstum von  $y''(t)$  mit  $t$  auftreten können, denn löst man Gleichung (19) nach  $y''$  auf, ergibt sich

$$y'' = \frac{Z(y, y')}{N(y)} \quad (20)$$

mit

$$Z(y, y') = a \cdot (y - M) \cdot y' - \frac{M}{(y - M)} \cdot y'^2 \quad (21)$$

---

<sup>12</sup>Herleitung siehe Anhang 3

und

$$N(y) = g(y - M) - M \quad (22)$$

Die Instabilitäten werden für  $g > 0$  durch einen Vorzeichenwechsel im Nenner  $N(y)$  der zweiten Ableitung  $y''$  in Beziehung (20) verursacht. Es sei zum Beispiel zu Beginn eines Kaufprozesses, also eines Handelsprozesses mit  $y' > 0$  und  $y > M$ , der Nenner  $N$  gemäß (22) negativ. Das ist möglich, wenn die stets positive Zahl  $g$  und der Wert  $y$  so klein sind, dass  $g(y - M) < M$  ist. Mit zunehmender Zeit wächst aber der Wert  $y$ , was schließlich zu  $g(y - M) > M$ , das heißt einem Vorzeichenwechsel von  $y''$  führen kann. Gleichheit muss ausgeschlossen werden, da dies ein Verschwinden des Nenners  $N$  und damit gemäß (20) einen Pol von  $y''$  bedeuten würde. In der Nähe dieses Pols ändert sich aber die Steilheit  $y'$  sehr stark mit der Zeit, das Verhalten von  $y(t)$  wird dort praktisch unkontrolliert. Bei einem Verkaufsprozess gilt Analoges mit entgegengesetztem Vorzeichen, wenn man einen Start mit  $g(y - M) > M$  annimmt und berücksichtigt, dass  $y(t)$  mit der Zeit fällt.

## 6.2 Allgemeiner Handelsprozess mit störenden Aktivitäten beim Kauf

Auch für den allgemeinen Handelsprozess werden hier nur Zeiträume betrachtet, in denen die Parameter  $M, S, a$  – und nun auch  $g$  – konstant sind, um Vergleiche mit den obigen Überlegungen zum gleichmäßigen Handelsprozess und zur Deutung von Zeitreihen als aneinander gereihte Anfangswertprobleme zu ermöglichen. Dennoch lassen sich für  $g > 0$  keine analytischen Lösungen der Gleichung (19) finden; Resultate können nur numerisch erzielt werden.

Abb. 3 zeigt ein Beispiel solcher Berechnungen. Es werden die gleichen Bedingungen und Parameter benutzt wie beim Kaufprozess im Anfangswertproblem **A** aus Abschnitt 5.1, nur jetzt ergänzt durch den Störungsfaktor  $g$ . Weil die Differentialgleichung (19) zweiter Ordnung ist, muss hier auch eine Anfangsbedingung für  $y'$  vorgegeben werden. Dazu wird angenommen, dass unmittelbar zu Beginn des Anfangswertproblems noch keine störende Aktivität existiert, sondern diese erst später einsetzt. Die Berechnung von  $y'(0)$  ist dadurch mit der für  $g = 0$  gültigen Gleichung (4) möglich. Zur Vereinfachung der Darstellung wurde im Beispiel dann allerdings auf einen zeitlich verzögerten Beginn verzichtet und  $g \neq 0$  gleich ab  $t > 0$  angenommen (ein späterer Einsatz würde keine prinzipiell anderen Aussagen liefern).

Für  $g = 0$  ist die (mit der Zeit ansteigende) Kurve  $y(t) = W(t)$  die gleiche wie in Abb. 1 im gleichmäßigen Kaufprozess. Die Einführung einer zusätzlichen störenden Aktivität  $g > 0$  beschleunigt den Wertanstieg für  $W(t)$  – im hier dargestellten Zeitraum noch eindeutig messbar bis zu Störungsfaktoren von etwa  $g = 1,0$ . Bei Werten oberhalb von 1,0 zeigt die Grafik für zunehmende Faktorwerte  $g$  einen immer früher einsetzenden steilen Anstieg von  $W(t)$ , bis hin zu praktisch unbeherrschbaren Ausmaßen. In der Grafik weisen Pfeile auf diesen Umstand hin. Diese Erscheinung ist eine Folge der oben erwähnten Instabilität, die mit ansteigendem  $y(t)$  beim Nulldurchgang des Nenners  $N(y)$  der zweiten Ableitung  $y''$  entsteht.

Mit dem hier verwendeten Basiswert  $M = 100$  [€] sowie dem Anfangswert  $y(0) = 110$  [€] liegt dieser kritische Übergang von  $y''$  für einen Störungsfaktor  $g = 10$  direkt am Kurvenanfang bei  $t = 0$ . Dort wird  $g(y - M) = 10 \cdot (110 - 100) = 100 = M$ , also der Nenner  $N$  gemäß (22) gleich null. Für kleineres  $g$  liegt dieser Punkt bei höherem  $y(t)$ , das heißt für den hier betrachteten Kaufprozess bei Zeiten  $t > 0$ .

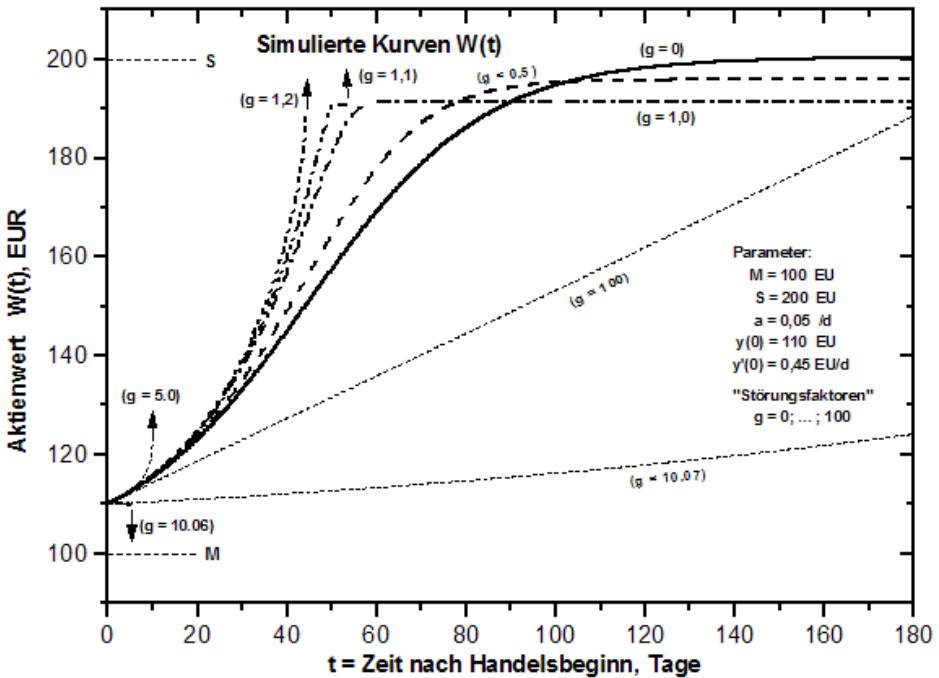


Abbildung 3: Allgemeiner Handelsprozess mit störender Aktivität beim Kauf

Für kleinere Werte von  $g$  verschiebt er sich mit abnehmendem  $g$  zu immer größeren Zeiten, bis hin zu praktisch uninteressanten Bereichen. In der Abbildung verläuft zum Beispiel der Handelsprozess für  $g = 1,0$  noch bei  $t = 200$  [d] stabil. Bei Störungsfaktoren oberhalb von 10 tritt erst für  $g \geq 10,07$  wieder eine gewisse Stabilität ein, allerdings bei Aktienwertanstiegen, die unterhalb der für  $g = 0$  gefundenen liegen. Für  $g \rightarrow \infty$  folgt schließlich  $y'' \rightarrow 0$ , was bedeutet, dass  $W(t)$  die Form einer Geraden bekommt, mit einem konstanten Anstieg  $y'(t) = y'(0)$ . In der Abbildung wird dies durch die Kurve für  $g = 100$  näherungsweise dargestellt. In dem relativ engen Bereich  $10 < g < 10,07$  liegen die „unangenehmsten“ Instabilitäten: hier kommt es mit zunehmender Zeit – nach einem flachen Maximum – zu starken und abrupten „Abstürzen“ (in der Grafik wieder durch einen Pfeil markiert).

Zusammenfassend können die in Abb. 3 dargestellten Ergebnissen so interpretiert werden, dass im Vergleich zu einem gleichmäßigen Kaufprozess störende Aktivitäten (Gier, Panik, taktisches Verhalten etc.) im Sinne von (3) immer zu Instabilitäten im Handelsprozess führen. Ein (sehr) großer Faktor  $g$  würde einen völlig irrationalen Handelsprozess implizieren (Kauf mit ständigem Wertanstieg bzw. Verkauf mit ständigem Wertverfall) bis wenigstens ein Marktteilnehmer sein Verhalten ändert – dann wäre ein neues Randwertproblem fällig. Bleiben diese Aktivitäten jedoch hinreichend klein, so können sie in vertretbaren Zeiten durch einen beschleunigten Wertanstieg  $W(t)$  positive Effekte bewirken – sie dürfen nur nicht zulange aufrecht erhalten bleiben. Werden die Aktivitäten aber weiter gesteigert, so führt das zu praktisch unkontrollierbaren Instabilitäten, die auch Wertabstürze beinhalten können, auf jeden Fall aber einen vermindernden Wertzuwachs verursachen.

### 6.3 Handelsprozess mit störenden Aktivitäten beim Verkauf

Nun soll ein Handelsprozess mit einem Zeitbereich vorherrschenden Verkaufsverhaltens behandelt werden. Er soll aus zwei Abschnitten, d. h. zwei aufeinanderfolgenden Anfangswertproblemen, bestehen: dem anfänglichen Kaufprozess aus dem oben behandelten Problem **A** bis zur Zeit  $t = t_1$  und daran anschließend einem Zeitabschnitt mit verringertem Kursziel  $S$ , ähnlich dem obigen Problem **B**<sup>13</sup>, also mit dominierendem Verkauf. Im Unterschied zum vorigen Beispiel beginnt dieser Abschnitt deshalb mit einem negativen Anfangswert von  $y'(t)$ .

Die Störungen sollen nur im Verkaufsabschnitt wirken. Sie können auch hier Instabilitäten hervorrufen, wie man bereits aus Gleichung (19) qualitativ ablesen kann. Solange die Relation  $y(t) > M$  eingehalten wird, bleibt für  $y'(t) < 0$  gemäß (21) der Zähler  $Z(y, y')$  von  $y''(t)$  durchweg negativ. Der Nenner hingegen kann mit zunehmender Zeit, das heißt hier mit abnehmendem Betrag von  $y(t)$ , sein Vorzeichen ändern, falls der Anfangswert  $y(t_1)$  größer als  $M(1 + 1/g)$  ist, wie aus (22) ersichtlich ist.

**Beispiel 2:**

$$\begin{aligned} a &= 0,05 \text{ [1/d]}, & M &= 100 \text{ [\euro]}, & S &= 200 \text{ [\euro]}, & t_1 &= 73 \text{ [d]}, \\ y(0) &= 110 \text{ [\euro]}, & y'(0) &= 0,45 \text{ [\euro/d]}, & S_1 &= 160 \text{ [\euro]} \end{aligned}$$

In Abb. 4 zu Beispiel 2 sind exemplarisch einige Ergebnisse dargestellt, bei denen wieder für den ersten Zeitabschnitt die Parameter aus Beispiel 1 für das Anfangswertproblem **A** benutzt wurden. Nur im zweiten Anfangswertproblem **B** erfolgte eine Änderung ( $S_1 = 160$ ). Analog zum vorigen Beispiel bestätigt auch in dieser Abbildung die Kurve für  $g_1 = 0$  das Ergebnis, das bereits vom gleichmäßigen Handelsprozess her bekannt ist. Störende Aktivitäten ( $g_1 > 0$ ) führen zu einer Verbesserung des zeitlichen Verlaufs von  $W(t)$ , hier einer immer kleineren Verringerung des zeitlichen Abfalls mit wachsendem Störungsfaktor  $g_1$ . Die numerischen Berechnungen zeigten, dass diese Verbesserung bei den hier gewählten Parametern nur eintrat, solange  $g_1 < 1,25$  gilt.

Überschreitet der Faktor  $g_1$  diesen Wert, so kommt es zu den erwähnten Instabilitäten, im jetzt vorliegenden Fall, mit  $y'(t_1) < 0$  als Anfangswert, stets verbunden mit Wertabstürzen. Erst bei  $g_1 \rightarrow \infty$  würde sich die abfallende Kurve  $y(t) = W(t)$  wieder einer „stabilen“ Geraden nähern, mit einem Anstieg  $y'(t) = y'(t_1) = -0,8 \text{ [\euro/d]}$ , was dann aber immer noch einen ständigen Werteaabfall (ohne zeitliche „Beruhigung“) bedeuten würde. In Abb. 4 ist dieses Verhalten mit der Kurve für  $g_1 = 50,0$  näherungsweise dargestellt.

Störende Aktivitäten können also auch im Verkauf positive Effekte bewirken, wenn sie hinreichend klein bleiben. Steigerungen enthalten wieder die Gefahr von Instabilitäten, hier von Kursabstürzen.

## 7 Gleichmäßiger Handelsprozess im realen Anpassungstest

### 7.1 Kalibrierung eines Zeitreihenintervalls des Frankfurt-Effekten-Fonds

Die oben erzielten Ergebnisse sollen nun an einem konkreten Beispiel überprüft werden. Als „Aktienpreis“ wird hier der Rücknahmepreis des Frankfurt-Effekten-Fonds<sup>14</sup> betrachtet. In Abb. 5 ist dessen zeitlicher Verlauf für den Zeitraum 07.10.1997 bis 30.12.2006

<sup>13</sup>Im Folgenden durch die Indizes „1“ gekennzeichnet.

<sup>14</sup>ISIN: DE0008478058

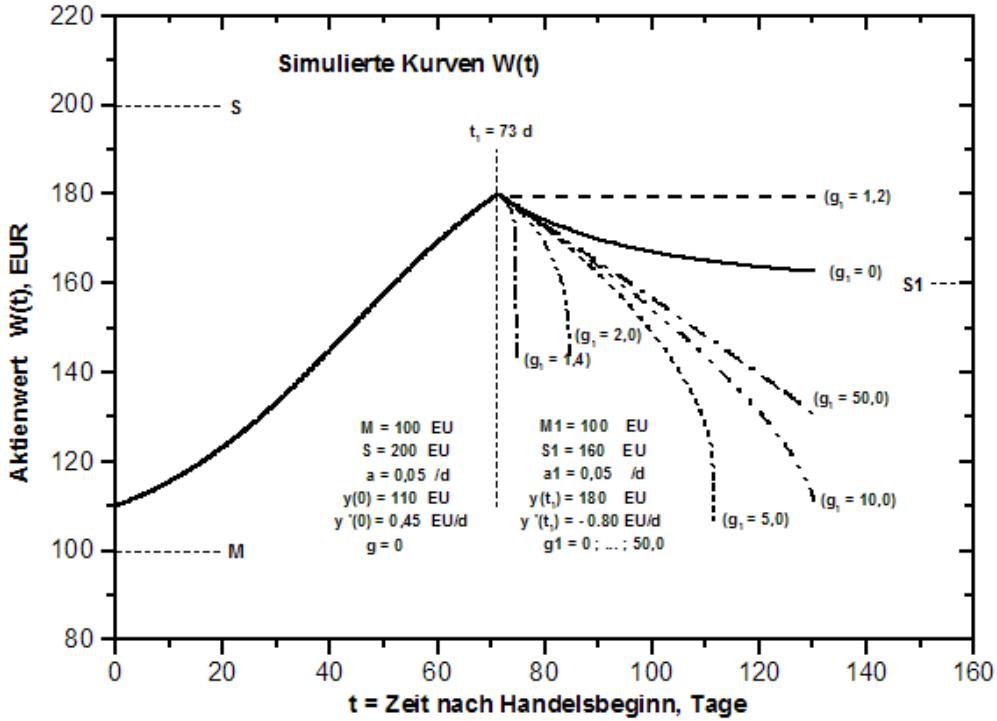


Abbildung 4: Allgemeiner Handelsprozess mit störenden Aktivitäten beim Verkauf (Wertabstürze bei  $g_1 > 1,25$ )

dargestellt. Abb. 6 enthält einen Ausschnitt hieraus für die Periode vom 07.10.1997 bis 10.11.1998, der Nullpunkt  $t = 0$  der Zeitachse entspricht dem 06.10.1997.

Das Verhalten dieser Zeitreihe ist im Prinzip durch zeitliche Zick-Zack-Bewegungen gekennzeichnet, in gewissen Intervallen mit relativ ausgedehnten Verläufen (ähnlich zu Dreiecksflanken), wie sie in Abschnitt 1 als typisch beschrieben und im Abschnitt 5 schon als Ergebnis eines gleichmäßigen Handelsprozesses erhalten wurden.

Der in Abb. 6 gewählte Zeitreihenausschnitt demonstriert deutlich, dass solche „Dreiecke“ der Aktienwerte über der Zeit tatsächlich in der Praxis als Mittelung über einen längeren Zeitraum erscheinen können – hier sogar über fast ein Jahr!

In der Grafik ist eine Anpassung durch die Funktionen  $y_2(t)$  und  $y_3(t)$  gemäß (7) und (8) realisiert worden – die Zeitreihe wurde also als Ausdruck eines gleichmäßigen Handelsprozesses, ohne störende Aktivitäten, aufgefasst. Die Kalibrierung beginnt mit dem Zeitpunkt  $t_A = 29$  [d] (Datum 04.11.1997) und dem Wert  $y_2(t_A) = 138$  [€]. Der Zeitreihenausschnitt wurde in vier sequentielle Anfangswertprobleme aufgeteilt, mit jeweils konstanten aber verschiedenen Parametern. Dabei ergaben sich folgende Werte:

1.  $t_A \leq t \leq t_1 = 290$  d:  $M = 122$  [€] und  $S = 230$  [€], d. h.  $b = 0,44$ ;  $a = 1,2$  [%/d]  
mit  $y_2(t)/M = 1 + b[1 + \tanh ab(t - t_0)]$ ;  $t_0 = 193,9$  [d]
2.  $t_1 \leq t \leq t_{E1} = 352$  d:  $M = 122$  [€] und  $S_1 = 90$  [€] ( $b_1 = 0,28$ );  $a = 2,0$  [%/d]  
mit  $y_{31}(t)/M_1 = 1 + b_1[1 + \coth a_1 b_1(t - t_{01})]$ ;  $t_{01} = 225,4$  [d]
3.  $t_{E1} \leq t \leq t_{E2} = 364$  d:  $M_2 = 90$  [€] und  $S_2 = 60$  [€] ( $b_2 = 0,17$ );  $a_2 = 3,5$  [%/d]  
mit  $y_{32}(t)/M_2 = 1 + b_2[1 + \coth a_2 b_2(t - t_{02})]$ ;  $t_{02} = 319,8$  [d]
4.  $t_{E2} \leq t \leq 400$  d:  $M_3 = 110$  [€] und  $S_3 = 166$  [€] ( $b_3 = 0,25$ );  $a_3 = 14,0$  [%/d]

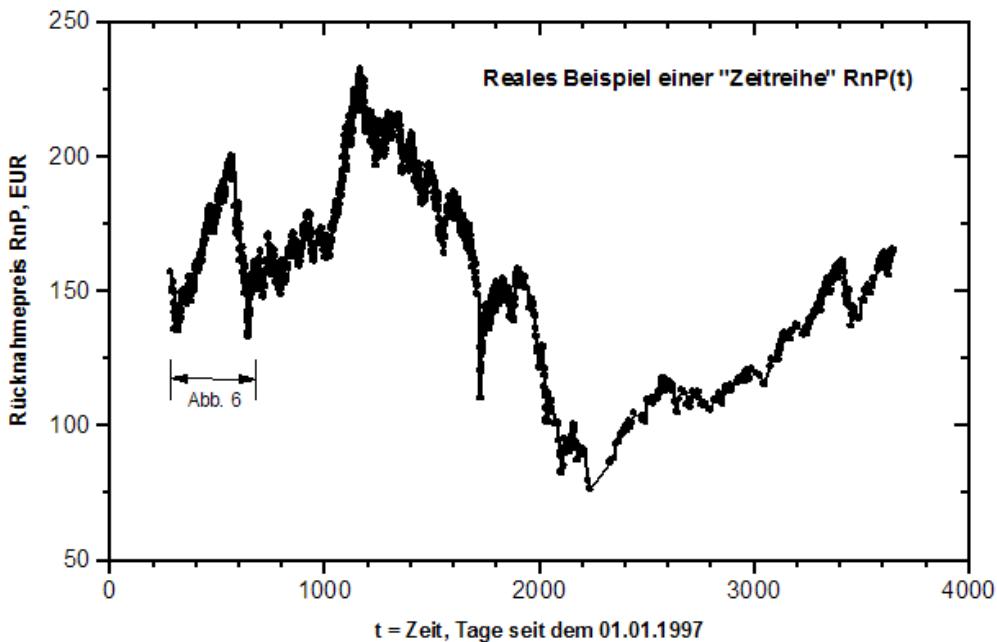


Abbildung 5: Rücknahmepreise des Frankfurt-Effekten-Fonds im Zeitraum 07.10.1997 – 29.12.2006

$$\text{mit } y_{23}(t)/M_3 = 1 + b_3[1 + \tanh a_3 b_3(t - t_{03})]; t_{03} = 367,4 \text{ [d]}$$

Die numerischen Berechnungen erfolgten in einer ersten implementierten Variante interaktiv: Die anzupassende Zeitreihe wird dabei eingelesen und auf dem Bildschirm dargestellt. Daran anschließend werden Lösungen der Differentialgleichung für gewählte Parameter berechnet, für  $g > 0$  nur numerisch aus Gleichung (19), für  $g = 0$  analytisch aus (4) oder numerisch aus (19), und ebenfalls auf dem Bildschirm dargestellt. Die Parameter werden solange variiert, bis (visuell!) beste Übereinstimmung zwischen berechneter und „experimenteller“ Kurve gegeben ist. Diese Prozedur ist erstaunlich eindeutig, sodass keine großen Unbestimmtheiten verbleiben. Daher erfolgte eine mathematische Anpassung (etwa mithilfe der Methode der kleinsten Quadratsummen) zunächst nicht.

Bei der Anpassung der Werte wurde ähnlich wie in obigen Anfangswertproblemen **A** und **B** verfahren; die Abbruchzeiten der einzelnen Abschnitte wurden der Zeitreihe direkt entnommen:  $t_1$  entsprach zum Beispiel dem Zeitpunkt der „Dreiecksspitze“ bei 290 [d] (dem 23.07.1998). Die Parameter  $M$ ,  $S$ , und  $a$  wurden in den Zeitabschnitten jeweils so lange variiert, bis eine gute mittlere Näherung der Zeitreihe durch die theoretischen Kurven erreicht war – in der Abbildung mit den entsprechenden Funktionen  $y_2(t)$ ,  $y_{31}(t)$ ,  $y_{32}(t)$  und  $y_{23}(t)$ . Der abfallende Teil von  $W(t)$  musste für diese Anpassung in zwei Abschnitte unterteilt werden, einen mit zunächst relativ moderater Abnahme, verursacht durch Absinken des Kursziels  $S$  und Ansteigen des Handelsfaktors  $a$  (der Handelsgeschwindigkeit), und daran anschließend (ab  $t_{E1} = 352$  [d], dem 23.09.1998) einen weiteren, mit erneut angestiegener Geschwindigkeit und verminderter Basiswert  $M$ , sowie einem verringerten Kursziel  $S$ , das sogar kleiner als  $M$  ist. Nach  $t_{E2} = 364$  [d] erhöhten sich Kursziel und Basiswert wieder, wobei letzterer aber noch unterhalb des Abbruchwertes  $y_{32}(t_{E2}) = 134,54$  [€] blieb. Außerdem erhöhte sich der Handelsfaktor  $a$  beträchtlich. Damit konnte der erneute Anstieg des Wertes  $W(t)$  im vierten Zeitabschnitt gedeutet werden.

Das Beispiel zeigt insgesamt, dass der mittlere zeitliche Verlauf  $W(t)$  des hier gewähl-

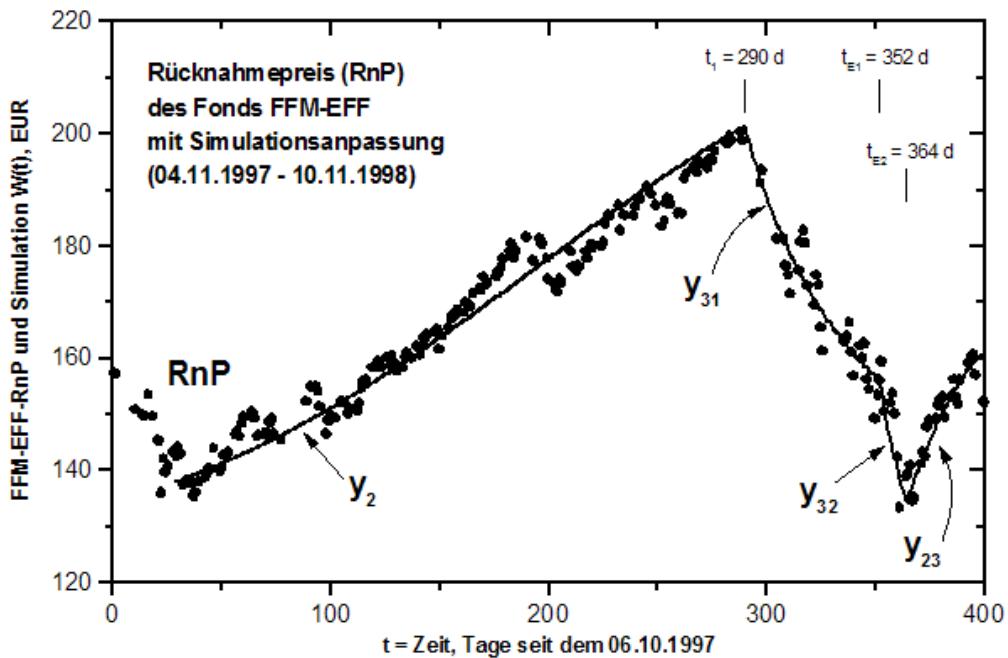


Abbildung 6: Rücknahmepreise des Frankfurt-Effekten-Fonds mit Simulationsanpassung für den Zeitraum 07.10.1997 – 10.11.1998

ten Ausschnitts der Frankfurt-Effekten-Fonds-Zeitreihe als Ergebnis eines gleichmäßigen Handelsprozesses beschrieben werden konnte – mit nur vier Zeitabschnitten konstanter Parameter, trotz des relativ großen Zeitraums von etwa einem Jahr.

## 7.2 Schlussfolgerungen

Mit den sehr einfachen Gleichungen (1) und (2), die den Berechnungen zu Grunde lagen, konnte eine hinreichend gute Kurvenanpassung an den betrachteten Abschnitt der Zeitreihe des Frankfurt-Effekten-Fonds erreicht werden. Dieses Ergebnis und auch die Möglichkeit, den etwa ein Jahr umspannenden Zeitabschnitt dabei in nur vier Teile mit konstanten Parametern zu unterteilen, überraschen. Offensichtlich genügen die hier dargestellten Überlegungen zu einem gleichmäßigen Handelsprozess, um Kauf- und Verkaufsprozesse zu beschreiben, wie sie bei der Wertbildung  $W(t)$  in der Praxis auch existieren. Im gewählten Beispiel scheint sogar eine Erweiterung der Methode auf die gesamte Zeitreihe möglich, wenn man diese in eine Serie von Anfangswertproblemen zerlegt, wie hier für vier Abschnitte demonstriert. Mit solchen Anpassungen ist es möglich, die zeitlichen Schwankungen der Aktienwerte bei realen Zeitreihen auf entsprechende Veränderungen von Verhaltensparametern der Akteure beim Handelsprozess zurückzuführen.

## 8 Zusammenfassung

Bestimmende Triebkräfte beim Aktienhandel und deren Wirkungen wurden mathematisch formuliert und einfache Beziehungen zwischen diesen abgeleitet. Damit gelang es, eine Beschreibung der zeitlichen Veränderung der Aktienwerte zu erhalten. Auf dieser Basis ließ sich ein gleichmäßiger Prozess definieren, der ohne Sonderaktionen auskommt, ohne „störende“ Aktivitäten wie etwa „Gier“ oder „Panik“, und tatsächlich reale Zeitreihen

von Aktienwerten simulieren kann. Dieser Prozess lässt sich in einfacher Weise mit einer nichtlinearen Differentialgleichung erster Ordnung beschreiben. Damit ergibt sich ein Modell für den zeitabhängigen Aktienwert  $W(t)$ , wobei die darin enthaltenen Parameter gut zur Charakterisierung des Verhaltens der Händler geeignet sind. Mit der Annahme zeitlich unveränderlicher Parameter lässt sich die Gleichung für die entsprechenden Zeiträume sogar analytisch lösen. Es konnte gezeigt werden, dass auf diese Weise typische Verläufe von Zeitreihen erhalten werden können. Durch die Anpassung der Funktionsparameter an ein reales Beispiel – hier eines Teils der Zeitreihe vom Frankfurt-Effekten-Fonds – wurde auch die Anwendbarkeit einer solchen Simulation demonstriert.

Zusätzlich wurde versucht, „störende“ Aktivitäten zu berücksichtigen, die in einem allgemeinen Handelsprozess Einfluss auf die Kaufstimulus-Beschleunigung haben könnten. Hierbei wurde die denkbar einfachste mathematische Ergänzung, ein additiver Ansatz, gewählt, was letztlich zu einer nichtlinearen Differentialgleichung zweiter Ordnung führte. Mit ihr ergaben sich tatsächlich Hinweise auf einen beschleunigten Wertzuwachs beim Kaufprozess bzw. eine verzögerte Wertminderung beim Verkauf – immer verbunden mit der Gefahr von Prozess-Instabilitäten, wie zum Beispiel Kursabstürzen.

Es ist zu vermuten, dass man jede Zeitreihe in eine Serie von Abschnitten mit konstanten Parametern unterteilen kann. Behandelt man diese dann als Aneinanderreihung von mehreren Anfangswertproblemen, mit Gültigkeit der Differentialgleichung in jedem und Anfangswerten, die sich jeweils aus dem Endwert des vorhergehenden Problems ergeben, dann lässt sich im Prinzip die gesamte Zeitreihe anpassen und eine statistische Auswertung des Zeitverhaltens der Parameter-Serie vornehmen. Der Vorteil dieses Vorgehens besteht darin, Zeitreihen auf der Basis messbarer Verhaltensparameter der Händler zu interpretieren. Das würde auch Prognosen zum zukünftigen Verlauf dieser Reihen erleichtern. Natürlich bleibt das schwierigste Problem der Prognose auch beim vorgeschlagenen Zugang bestehen: das rechtzeitige Erkennen von „Umschlagpunkten“, das heißt Zeitpunkten, an denen eine Tendumkehr eingeleitet wird.

## Literatur

- [1] Handrock-Meyer S.: Differentialgleichungen für Einsteiger. Eine anwendungsbezogene Einführung für Bachelor-Studiengänge, Hanser Fachbuchverlag, München 2007
- [2] Kahn M. N.: Technische Analyse: Klar und einfach, Finanzbuch Verlag, München 2010
- [3] Kamke E.: Gewöhnliche Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen. 8. Aufl., Geest & Portig, Leipzig 1967
- [4] Luderer B., Nollau V., Vetters K.: Mathematische Formeln für Wirtschaftswissenschaftler. 6. Aufl., Vieweg + Teubner, Wiesbaden 2008
- [5] Murphy J. J.: Technical Analysis of the Financial Markets: A Comprehensive Guide to Trading Methods and Applications, Prentice Hall Press, New York 1999
- [6] Neusser K.: Zeitreihenanalyse in den Wirtschaftswissenschaften. 2. Aufl., Vieweg + Teubner, Wiesbaden 2009
- [7] Oitzl P.: Modell für die kurzfristige Aktienkursprognose mit Hilfe der Kapitalmarktsyn- ergetik, Diplomica, Hamburg 2008
- [8] Sattler R. R.: Aktienkursprognose. Professionelles Know-how zur Vermögensanlage, Vahlen, Wiesbaden 1999
- [9] Schlitter N.: Analyse und Prognose ökonomischer Zeitreihen: Neuronale Netze zur Aktienkursprognose, VDM Verlag, Saarbrücken 2008

## Anhang

### A1. Hyperbeltangens und Hyperbelkotangens

Da die Hyperbelfunktionen  $\tanh x$  und  $\coth x$  nicht allzu bekannt sind, hier deren Graphen, Bildungsvorschriften und Ableitungen (vgl. z. B. Luderer/Nollau/Vetters (2008)):

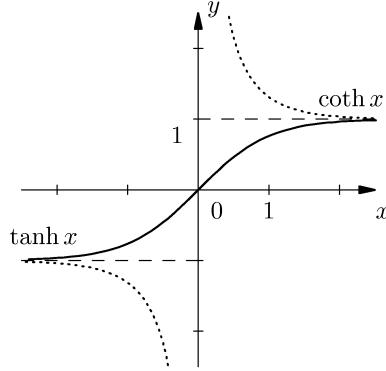


Abbildung 7: Die Graphen der Funktionen  $\coth$  und  $\tanh$

Für diese Funktionen gelten folgende Formeln:

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad \coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Der Hyperbeltangens hat den Definitionsbereich  $D = \mathbf{R}$  und den Wertebereich  $W = (-1, 1)$ , während für den Hyperbelkotangens  $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$  und  $W = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$  gilt. Die Ableitungen der beiden Funktionen lauten:  $(\tanh x)' = 1 - \tanh^2 x$ ,  $(\coth x)' = 1 - \coth^2 x$ .

### A2. Herleitung der Beziehungen (7) und (8)

Die Differentialgleichung für  $W(t)$

$$\frac{dW(t)}{dt} + \frac{a}{M} \cdot W(t)^2 - a \cdot \left(1 + \frac{S}{M}\right) \cdot W(t) + aS = 0 \quad (23)$$

kann durch Transformation auf eine Form gebracht werden, für die analytische Lösungen bekannt sind. Mit den Definitionen  $y = W$  und  $y' = \frac{dW}{dt}$  ergibt sich aus Gleichung (23)

$$y' + \frac{a}{M} \cdot y^2 - a \cdot \left(1 + \frac{S}{M}\right) \cdot y + aS = y' + \frac{a}{M} [y^2 - (M + S)y] + aS = 0$$

und hieraus

$$y' + \frac{a}{M} \cdot \left[y - \frac{M + S}{2}\right]^2 + aS - \frac{a}{M} \cdot \frac{(M + S)^2}{4} = 0$$

bzw.

$$y' + \frac{a}{M} \cdot \left[y - \frac{M + S}{2}\right]^2 - \frac{a}{M} \cdot \frac{(M - S)^2}{4} = 0. \quad (24)$$

Zur Vereinfachung wird eine **erste Variablentransformation**  $\eta = y - \frac{M + S}{2}$  durchgeführt.

Damit ergibt sich  $\eta' = y'$  sowie  $\eta^2 = \left[y - \frac{M + S}{2}\right]^2$  bzw. – in Gleichung (24) eingesetzt – die Beziehung

$$\eta' + \frac{a}{M} \cdot \eta^2 + aS - \frac{a}{M} \cdot \frac{(M + S)^2}{4} = 0. \quad (25)$$

Die Dimension von  $\eta$  ist dabei Euro. Mit einer **zweiten Variablentransformation**

$$\eta = \frac{M}{a} \cdot z, \quad \text{also} \quad \eta' = \frac{M}{a} \cdot z' \quad \text{und} \quad \eta^2 = \left(\frac{M}{a}\right)^2 \cdot z^2$$

wird aus (25) schließlich

$$\frac{M}{a} \cdot z' + \frac{M}{a} \cdot z^2 + \frac{a}{M} \cdot \left[ MS - \frac{(M+S)^2}{4} \right] = 0$$

oder

$$z' + z^2 = -\left(\frac{a}{M}\right)^2 \cdot \left[ MS - \frac{(M+S)^2}{4} \right] = \left(\frac{a}{M}\right)^2 \cdot \frac{(M-S)^2}{4} \equiv A. \quad (26)$$

Hierbei sind  $d^{-1}$  und  $d^{-2}$  die Dimensionen von  $z$  bzw.  $A$ . Als Zeiteinheit wurde in den Gleichungen ein Tag (d. h.  $d$ ) benutzt. Zu beachten ist außerdem, dass die Konstante  $A$  eine Quadratzahl darstellt und somit stets nichtnegativ ist.

Eine **weitere Variablentransformation**

$$t \rightarrow \tau = A^{\frac{1}{2}} \cdot t \quad \text{bzw.} \quad z \rightarrow Z = A^{-\frac{1}{2}} \cdot z$$

mit

$$z' = \frac{dz}{dt} = A^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{dZ}{dt} = A^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{dZ}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt} = A \cdot Z^\bullet \quad \text{und} \quad Z^\bullet \equiv \frac{dZ}{d\tau}, \quad A \neq 0$$

( $\tau$  und  $Z$  sind dimensionslos) vereinfacht (26) zu

$$A \cdot Z^\bullet + A \cdot Z^2 = A \quad \text{bzw.} \quad Z^\bullet + Z^2 = 1. \quad (27)$$

Die Differentialgleichung (27) ist als Gleichung in getrennten Variablen **analytisch lösbar** (s. Kamke (1967), S. 295; Handrock-Meyer (2007) S. 39ff.). Ihre Lösungen lauten:

$$Z_1 = \pm 1, \quad Z_2 = \tanh(\tau + C), \quad Z_3 = \coth(\tau + C). \quad (28)$$

Mit

$$Z = A^{-\frac{1}{2}} \cdot z = Z = A^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{a}{M} \cdot \eta = Z = A^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{a}{M} \cdot \left(y - \frac{M+S}{2}\right) \quad (29)$$

können diese auf  $y = W$  zurücktransformiert werden. Bei der enthaltenen Wurzel aus  $A$  muss berücksichtigt werden, dass

$$A = \left(\frac{a}{M}\right)^2 \cdot \left(\frac{(M-S)^2}{4}\right)$$

gilt, sodass sie sich als

$$A^{\frac{1}{2}} = \pm \left|\frac{a}{M}\right| \cdot \left|\frac{M-S}{2}\right| \quad (30)$$

aus den Absolutbeträgen der beiden Faktoren in (30) ergibt.

Da  $a$ ,  $M$  und  $S$  ausschließlich positive Größen sind, kann der Ausdruck für  $A^{\frac{1}{2}}$  vereinfacht werden zu

$$A^{\frac{1}{2}} = \pm \frac{a}{M} \cdot \frac{S-M}{2},$$

woraus gemäß (29) nun folgender Ausdruck für  $y$  als Funktion von  $Z$  folgt:

$$y - \frac{M+S}{2} = \frac{M}{a} \cdot A^{\frac{1}{2}} \cdot Z = \pm \frac{S-M}{2} \cdot Z.$$

Hieraus resultiert

$$y = \frac{M+S}{2} \pm \frac{S-M}{2} \cdot Z.$$

Für die erste Lösung  $y_1(Z_1)$  in (28) heißt das

$$y_1 = \frac{M+S}{2} + \frac{S-M}{2} = y_{11} = S$$

oder

$$y_1 = \frac{M+S}{2} - \frac{S-M}{2} = y_{12} = M,$$

also zwei über der Zeit konstante Werte  $M$  oder  $S$ .

Für die zweite Lösung gilt dann

$$\begin{aligned} y_2(t) &= \frac{M+S}{2} \pm \frac{S-M}{2} \cdot \tanh(A^{\frac{1}{2}} \cdot t + C) \\ &= \frac{M+S}{2} \pm \frac{S-M}{2} \cdot \tanh\left(C \pm \frac{S-M}{2} \cdot \frac{a}{M} \cdot t\right) \end{aligned} \quad (31)$$

und für die dritte

$$\begin{aligned} y_3(t) &= \frac{M+S}{2} \pm \frac{S-M}{2} \cdot \coth(A^{\frac{1}{2}} \cdot t + C) \\ &= \frac{M+S}{2} \pm \frac{S-M}{2} \cdot \coth\left(C \pm \frac{S-M}{2} \cdot \frac{a}{M} \cdot t\right). \end{aligned} \quad (32)$$

Mit den Definitionen

$$C = A^{\frac{1}{2}} \cdot t_0 \quad \text{und} \quad b = \frac{1}{2} \left( \frac{S}{M} - 1 \right)$$

ergeben (31) und (32) die Lösungen (7) und (8); die Vorzeichen „±“ reduzieren sich dabei durch die ausschließlich positive Zählung der Zeit  $t$ .

### A3. Herleitung der Beziehung (19)

Wir gehen von Gleichung (3) aus, die in abgekürzter Schreibweise

$$K'' = -a \cdot W' + g \cdot W'' \quad (33)$$

lautet ( $g$  ist der dimensionslose Störungsfaktor). Um aus (33) und Gleichung (2) wieder eine Differentialgleichung für  $W(t)$  zu gewinnen, muss auch (2) noch einmal differenziert werden – allerdings erst nach ihrer Auflösung hinsichtlich  $K(t)$ . Andernfalls würden die Beziehungen

$$\frac{d^2(W(t) - M)}{dt^2} = \frac{1}{M} \cdot \frac{d}{dt} [(W(t) - M) \cdot \frac{d}{dt} K(t)]$$

bzw.

$$W'' = \frac{1}{M} \cdot (W' \cdot K' + (W - M) \cdot K'')$$

entstehen, in denen die erste Ableitung  $K'$  enthalten ist. Für deren Substitution gibt es jedoch keine weitere Gleichung.

Daher muss Gleichung (2) nach  $\frac{dK(t)}{dt}$  aufgelöst und dann differenziert werden, damit anschließend mithilfe von (33) die Größe  $\frac{d^2K(t)}{dt^2}$  eliminiert werden kann. Aus (2) folgt zunächst

$$\frac{d}{dt} K(t) = \frac{M}{[W(t) - M]} \cdot \frac{d}{dt} [W(t) - M]$$

bzw.

$$K' = \frac{M}{(W - M)} \cdot W' = M \cdot \frac{W'}{(W - M)}$$

und daraus, durch nochmaliges Differenzieren,

$$K'' = M \cdot \left( \frac{W''(W - M) - W'^2}{(W - M)^2} \right).$$

Mit Hilfe von (33) ergibt sich dann die gesuchte Differentialgleichung für  $W(t)$  in der Form

$$-a \cdot W' + g \cdot W'' = M \cdot \left( \frac{W''(W - M) - W'^2}{(W - M)^2} \right).$$

Nach den Umformungen

$$(W - M)^2 \cdot (g \cdot W'' - a \cdot W') = M \cdot [W''(W - M) - W'^2]$$

und

$$W''[g \cdot (W - M)^2 - M \cdot (W - M)] = a \cdot (W - M)^2 \cdot W' - M \cdot W'^2$$

erhält man schließlich

$$W''[g \cdot (W - M) - M] = a \cdot (W - M) \cdot W' - \frac{M}{(W - M)} \cdot W'^2,$$

was mit  $W = y$  der Beziehung (19) entspricht.

#### A4. Spezialfall $g = 0$ in Beziehung (19)

Hier soll gezeigt werden, dass aus (19) für  $g = 0$  die Beziehung (4) bzw. (5) folgt.

Aus Beziehung (19) ergibt sich für den Fall  $g = 0$  nach Division durch  $M > 0$  die Gleichung

$$y'' + \frac{a}{M} \cdot y \cdot y' - a \cdot y' - \frac{1}{(y - M)} \cdot y'^2 = 0. \quad (34)$$

Erhält man diese Differentialgleichung auch direkt aus den Gleichungen (1) und (2) für den gleichmäßigen Handelsprozess?

Differentiation der Differentialgleichung (5) ergibt

$$y'' + \frac{2a}{M} \cdot y' \cdot y - a \cdot \left( 1 + \frac{S}{M} \right) \cdot y' = 0$$

und damit zunächst eine andere Form als den Ausdruck (34). Die geforderte Gleichheit beider verlangt

$$-a \cdot y' - \frac{1}{(y - M)} \cdot y'^2 = \frac{a}{M} \cdot y' \cdot y - a \cdot \left( 1 + \frac{S}{M} \right) \cdot y',$$

d. h.

$$-\frac{1}{(y - M)} \cdot y'^2 = \frac{a}{M} \cdot y' \cdot y - a \cdot \frac{S}{M} \cdot y'$$

bzw.

$$-y'^2 = \frac{a}{M} \cdot (y - M) \cdot y' \cdot y - a \cdot \frac{S}{M} \cdot (y - M) \cdot y' = \frac{a}{M} \cdot y^2 \cdot y' - a \cdot y \cdot y' - a \cdot \frac{S}{M} \cdot y \cdot y' + a \cdot S \cdot y'.$$

Ist  $y' \neq 0$ , so folgt hieraus als Bedingung

$$y' = a \cdot y + a \cdot \frac{S}{M} \cdot y - \frac{a}{M} \cdot y^2 - a \cdot S = a \cdot \left( 1 + \frac{S}{M} \right) \cdot y - \frac{a}{M} \cdot y^2 - a \cdot S,$$

also die Differentialgleichung (5). Das bedeutet aber, dass tatsächlich die Gleichungen (34) und (5) identisch sind, solange  $y' \neq 0$  gilt.