EINIGE ASPEKTE DER BEWERTUNG VON SWAPTIONS

DANIEL AKUME [1] und BERND LUDERER

University of Buea, Computer Science Department
P.O. Box 63, Buea, Cameroon
daniel.akume@minesup.gov.cm

Technische Universität Chemnitz, Fakultät für Mathematik,
09107 Chemnitz, Deutschland
bernd.luderer@mathematik.tu-chemnitz.de

Summary: The aim of this paper is to illustrate some techniques in pricing interest rate swaptions, where we discuss the valuation of swaptions following the modified Black model. Finally, we discuss risk parameters and hedging strategies as applicable to swaptions.

Key words: Black model, interest rate, swap, swaption, hedging

Mathematics Subject Classification: 91 B 28, 00 A 69

1 Einleitung

Zinsswaps (Interest Rate Swaps, IRS) werden seit längerer Zeit von Großunternehmen zum Hedgen gegen Zinsänderungsrisiken eingesetzt. Ein Kreditnehmer, der einen Zinsanstieg erwartet, kann mit einem Swap seine variable Verpflichtung in eine feste Zinsverpflichtung umwandeln. Dadurch ist er in der Lage, für ihn ungünstige Einflüsse von Zinsschwankungen in Grenzen zu halten.

[1] Supported by DAAD under grant number A/001/31321, at Chemnitz University of Technology.

Swaptions, die Optionen auf Swap-Kontrakte darstellen, wurden zum ersten Mal Mitte der achtziger Jahre in den USA im Zusammenhang mit der Emission von strukturierten Anleihen, die eine Call-Option enthalten, zum Einsatz gebracht. Mit der Ausgabe einer festverzinslichen kündbaren Anleihe behält der Emittent das Recht, den Bond zu pari vom Investor zu festgelegten zukünftigen Zeitpunkten zurückzukaufen. Dafür bekommt der Investor etwas mehr Rendite. Seither gewinnen Swaptions immer mehr an Bedeutung, weswegen auch deren korrekte Bewertung sehr wichtig ist.

Das Black-Modell (siehe z. B. [8]) findet am Markt aus zweierlei Gründen breite Anwendung und Akzeptanz in der Bewertung europäischer Zinsoptionen wie Caps, Floors oder Swaptions: Zum einen benötigt das Modell als zu berechnendem Inputparameter lediglich die Volatilität, die zumeist aus den Marktdaten gewonnen wird. Zum anderen wird durch die Annahme des lognormalverteilten Underlyings das zugrundeliegende Basisinstrument direkt modelliert.

Die Einfachheit des Black-Modells bringt aber auch gewisse Nachteile mit sich: Aufgrund der Annahme einer konstanten Volatilität und risikolosen Zinsrate eignet es sich nur in gewissen Grenzen zur Anwendung. So kann z. B. ein Cap nicht mit Anleihen verschiedener Fälligkeiten gehedged werden. Ferner eignet sich das Black-Modell nur für die Modellierung europäischer Optionen und es wird ein Forwardsatz betrachtet (z. B. ein Forward-Swapsatz für einen Swap).

Alternativen zum Black-Modell bilden arbitragefreie Binomialmodelle, zu denen u. a. das Black-Derman-Toy-Modell [2] und das Ho-Lee-Modell [6] zählen. Die Modellierung mittels eines Binomialbaums basiert auf einer sich stochastisch ändernden risikolosen Zinsrate in jedem Zeitabschnitt. Solch ein Modell eignet sich zur Bewertung zinsderivativer Instrumente aller Fälligkeiten, insbesondere zur Modellierung amerikanischer Optionen.

In der vorliegenden Arbeit wird die Bewertung von Swaptions aus mathematischer Sicht erläutert, wobei das Modell von Black Anwendung findet. Ferner wird detailliert auf Swaps eingegangen, da diese die Grundlage einer Modellierung und Bewertung von Swaptions bilden. Schließlich werden Hedging-Strategien diskutiert, die Swaptions einbeziehen.

2 Das Black-Modell

Das Black-Modell (1976) stellt eine Modifikation des Black-Scholes-Modells [3] zur Bewertung von Aktienoptionen dar, das Future-Kontrakte als Underlying verwendet. Black bewertet eine europäische Option, als wäre der Wert bei Fälligkeit T nicht vom Spotpreis (Kassapreis) des zugrundeliegenden Basisinstruments sondern vom Futurepreis abhängig.

Bezeichnungen

T	–	Fälligkeitszeitpunkt der Option
t	–	aktueller Zeitpunkt
S	–	Ausübungspreis, Strike Price
i	–	risikoloser Zinssatz
P	–	Kassakurs des zugrundeliegenden Basisinstruments
P_T	–	Kurs des Basisinstruments zum Zeitpunkt T, Futurekurs
σ	–	Volatilität
$\Phi(\cdot)$	–	Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung

Oftmals findet in Modellen die stetige Verzinsung Anwendung, so dass als Diskontfaktoren e^{-iT} bzw. $\mathrm{e}^{-i(t-T)}$ auftreten. Andere Diskontfaktoren sind ebenfalls möglich und gebräuchlich.

Definition 1 *Eine Call-Option gibt dem Inhaber das Recht (nicht aber die Verpflichtung), eine festgelegte Menge eines Wertpapiers zu einem festgelegten Preis (Strike Price) vor oder an einem festgelegten (Verfalls-) Datum vom Verkäufer zu verlangen. Eine Put-Option gibt dem Inhaber das Recht (nicht aber die Verpflichtung), eine festgelegte Menge eines Wertpapiers zum Strike Price vor oder am Verfallsdatum an den Verkäufer zu liefern.*

Falls das oben erwähnte Recht vor dem Verfallszeitpunkt ausgeübt werden darf, spricht man von einer *amerikanischen* Call- bzw. Put-Option. Anderenfalls handelt es sich um eine *europäische* Option, deren Preis mit P_{Call} bzw. P_{Put} bezeichnet werden soll. Bei Fälligkeit der Option gilt offensichtlich

$$P_{\text{Call}} = \max\{P_T - S; 0\}, \qquad P_{\text{Put}} = \max\{S - P_T; 0\}\,.$$

Zusätzlich zu den Annahmen[2] des Black-Scholes-Modells (vgl. [3], [11]) für Optionen auf Aktien, gilt als **Hauptannahme** des Black-Modells die lognormale Verteilung[3] des Futurepreises P_T des Underlyings zur Fälligkeit T der Option. Ferner entwickle sich der Futurekurs P_T gemäß der Brownschen Bewegung: $\frac{\partial P_T}{P_T} = \mu dt + \sigma dz$, wobei $\mathrm{d}P_T$ die Kursänderung, μ die Driftrate (durchschnittlicher Zuwachs des Kurses pro Zeiteinheit), σ die Standardabweichung der Kursänderungsrate und z der standardisierte Brownsche Prozess seien.

[2] Diese Annahmen sind:
(A1) Am Kapitalmarkt ist zeitstetiges Handeln möglich.
(A2) Alle relevanten Einflussgrößen werden mittels eines zeitstetigen Markov-Prozesses dargestellt.
(A3) Die Kurse der Wertpapiere können durch einen stochastischen Prozess so beschrieben werden, dass die Differenz aus tatsächlichem Ertrag und Erwartungswert des Ertrags ein Martingal darstellt.
(A4) Es gibt keine Arbitragemöglichkeiten.

[3] Eine Zufallsvariable X ist lognormalverteilt, wenn die Variable $Y = \ln X$ normalverteilt ist.

Die Black-Scholes-Formel hat folgende Gestalt (siehe z. B. [2]).

$$P_{\text{Call}} = P\Phi(d_1) - Sd_T\Phi(d_2)$$
$$P_{\text{Put}} = Sd_T\Phi(-d_2) - P\Phi(-d_1)$$
$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left[\ln\frac{P}{S} + \left(\frac{1}{2}\sigma^2 + i\right)T\right], \qquad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

Zwischen dem Futurekurs P_T und dem Kassakurs P gilt folgende Beziehung:

$$P_T \cdot \mathrm{e}^{-iT} = P.$$

Damit kann die Black-Scholes-Formel wie folgt umgeformt werden (vgl. [1]):

$$P_{\text{Call}} = \mathrm{e}^{-iT}[P_T\Phi(d_1) - S\Phi(d_2)], \tag{1}$$

$$P_{\text{Put}} = \mathrm{e}^{-iT}[S\Phi(-d_2) - P_T\Phi(-d_1)] \tag{2}$$

mit

$$d_1 = \frac{\ln\frac{P_T}{S} + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}, \qquad d_2 = \frac{\ln\frac{P_T}{S} - \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}\,. \tag{3}$$

3 Zinsswaps

3.1 Begriffe und Anwendungsmöglichkeiten

Definition 2 *Ein (Zins-) Swap*[4] *ist eine vertragliche Vereinbarung über den Austausch von festen gegen variable Zinssätze (geknüpft an einen Referenzzinssatz, z. B. den LIBOR). Die Zinszahlungen beziehen sich auf ein vereinbartes Nominalkapital bei vorgegebener Laufzeit.*

Ein Zinsswap stellt somit eine zeitlich limitierte Vereinbarung zwischen Parteien (Swappartner) zum Austausch von Zinszahlungen zu vorher festgelegten Zeitpunkten dar, die auf einen Nennwert (Notional Principal Amount) bezogen sind. Dabei zahlt die Swappartei A (Festzinsempfänger, Receiver Position) in bestimmten Zeitabständen (an einen Referenzzinssatz gekoppelte) variable Zinsbeträge an die Gegenpartei B (Festzinszahler, Payer-Position) und erhält im Gegenzug feste Zinsbeträge (vgl. z. B. [10]). Das Kapital selbst wird nicht ausgetauscht.
Bewertungs- und Auszahlungszeitpunkte auf der variablen Seite fallen in der Regel auseinander. Bezeichnet man die Länge des variablen Zahlungsintervalls mit Δt und wird die Höhe des variablen Referenzzinssatzes im

[4] In dieser Arbeit werden die Bezeichnungen Zinsswap und Swap synonym verwendet.

Zeitpunkt t festgelegt, so wird eine entsprechende Zahlung in $t + \Delta t$ generiert. Fallen die Zahlungszeitpunkte auf beiden Seiten zusammen[5], so findet in der Regel eine Zinsverrechnung („Nettung") statt. Das heißt, es wird nur der überschüssige Teil bezahlt.
Swaps eignen sich besonders zur Umgestaltung der Struktur einzugehender oder bereits eingegangener Verbindlichkeiten. Erkannte Zinsänderungsrisiken können durch Swaps gehedged werden. Aus diesen Gründen haben sich Swaps zu einem wichtigen Instrument des Finanz- und Bilanz-Managements entwickelt.

3.2 Bewertung von Zinsswaps

Bei der Bewertung von Swaps geht es darum, den Festzinssatz i_{fix} des Swaps so zu bestimmen, dass sich zum Zeitpunkt $t = 0$ ein Swapwert von null ergibt (vgl. [1], [9]). Gemäß der Definition eines Swaps lässt sich die Zahlungsreihe des Swaps durch zwei Anleihen mit festen und variablen Zinssätzen duplizieren (vgl. [8], [10]); letztere wird auch als Floater bezeichnet.
Es seien $0 < t_1 < \cdots < t_n$ die Zahlungstermine des Swaps. Man kann dann zeigen, dass sich bei zeitlich konstanten Nominalbeträgen die Festzinsrate i_{fix} aus der folgenden Beziehung bestimmen lässt (siehe [5], [9]; vgl. auch [10], [11]):

$$i_{\text{fix}} = \frac{1 - d_n}{\sum\limits_{k=1}^{n} d_k}, \qquad d_k = \mathrm{e}^{-it_k}, \quad k = 1, \dots, n. \tag{4}$$

Diese Größe kann als Preis des Swaps (aus heutiger Sicht) angesehen werden.

4 Swaptions

Eine Swaption stellt eine Kombination der beiden Finanzinstrumente Zinsswap und Option dar.

Definition 3 *Eine Swaption (Swap-Option) gibt dem Käufer das Recht, zu einem festgelegten Zeitpunkt (europäische Option) einen hinsichtlich Laufzeit und Zinshöhe spezifizierten Swap zu erwerben. Der Käufer einer so definierten Kaufoption erwibt das Recht, einen Festzinssatz zu zahlen und einen variablen Zinssatz zu erhalten (Payer-Swaption). Der Käufer der Verkaufsoption erwibt das Recht, einen Festzinssatz zu empfangen (Receiver Swaption) und variablen Zins zu zahlen.*

[5] Sollte das variable Zahlungsintervall beispielsweise kleiner sein als das fixe, so werden fixe und variable Zahlungszeitpunkte in einigen Verrechnungsterminen auseinanderfallen.

Eine Swaption ist somit eine Option auf einen Forward-IRS. Wie beim IRS werden Swaptions unter anderem zum Hedgen risikobehafteter Zinsentwicklungen in zukünftigen Zahlungsperioden eingesetzt. Die Prämie, die beim Kauf einer Swaption entrichtet wird, ist quasi als Versicherungsprämie gegen Zinsschwankungen den Finanzierungskosten zuzuschlagen. Unternehmen können sich damit Mindestzinshöhen für Anlagen oder Höchstzinssätze für Kredite sichern.
Es werde beispielsweise ein Unternehmen betrachtet, das in sechs Monaten einen 5-Jahres-Kredit aufnehmen wird. Die Zinssätze sind variabel und die Zahlungen sollen alle sechs Monate erfolgen.
Dieses Unternehmen kann sich gegen steigende Zinsen absichern, indem es eine europäische Payer-Swaption kauft. Gegen Zahlung einer Prämie (Preis der Swaption) erwirbt es damit das Recht, variable Zahlungen (die meist an den LIBOR geknüpft sind) zu erhalten und dafür einen festgelegten Festzinssatz i_{fix} für den fünfjährigen Zeitraum zu zahlen. In sechs Monaten (dem Fälligkeitstermin der Swaption) beginnt der Swap.
Am Verfallstag ergeben sich zwei Möglichkeiten. Ist der Markt-Swapsatz höher als i_{fix}, so kommt es zu einer Ausübung der Option und der Inhaber kann seine variable Zinsverpflichtung unterhalb der Marktzinsen umtauschen. Das Unternehmen kommt somit in den Genuss einer niedrigeren Zinsbelastung. Falls jedoch der Markt-Swapsatz niedriger als der Ausübungssatz ist, so wird die Swap-Option nicht ausgeübt und das Unternehmen finanziert sich zu dem aktuellen, niedrigen variablen Zinssatz.

5 Bewertung von Swaptions mittels Black-Modell

Es seien zunächst folgende Bezeichnungen eingeführt:

T	–	Fälligkeitstermin der Swaption
σ_F	–	Volatilität des Forward-Swapsatzes
i_S	–	Strike-Zinsrate
i_F	–	Markt-Swapsatz (zu pari) bezüglich des Zeitpunktes T, Forward-Swapsatz
N	–	Nominalbetrag der Swap-Vereinbarung

Der Einfachheit halber seien im Weiteren gleiche Zahlungstermine auf beiden Seiten vereinbart.
Als Inputparameter wird die Größe σ aus Marktdaten gewonnen (berechnet als historische oder implizite Volatilität; vgl. [11]). Es seien $t_1 < \cdots < t_n$ die Zahlungstermine des Swaps und $t_0 = T$.
Zur Herleitung einer Bewertungsgleichung betrachten wir als ersten Schritt den der Option zugrunde liegenden Swap. Die Laufzeit des Swaps beginnt am Verfallstag der Swaption (d. h. zum Zeitpunkt T; dies ist gleichzeitig der

erste Zinsausgleichstermin) und endet zum Zeitpunkt t_n. Der Swap selbst besteht aus einer variablen und einer fixen Zinsverpflichtung, die jeweils zu den n Zinsausgleichsterminen zu zahlen sind.
Die einzelnen variablen Zinszahlungen hängen neben dem Referenzzinssatz (meist LIBOR), der zum Zeitpunkt t_k gültig ist, vom Nominalbetrag N und der Länge des jeweiligen Zinsintervalls $(t_i - t_{i-1})$ ab. Die Festzinszahlungen sind vom Festzinssatz i_F sowie demselben Nominalbetrag N und denselben Intervallen abhängig.

5.1 Bewertung europäischer Swaptions

Die Auszahlung an den Käufer einer Payer-Swaption zum Zeitpunkt T beträgt

$$\sum_{i=1}^{n} N \cdot \mathrm{e}^{-(t_i - T)} \cdot (i_F - i_S) \cdot (t_i - t_{i-1}), \tag{5}$$

falls $i_F > i_S$ und 0 sonst. Ihr heutiger Wert ist demnach gleich

$$\begin{aligned} &\mathrm{e}^{-iT} \cdot \sum_{i=1}^{n} N \cdot \mathrm{e}^{-i(t_i - T)} \cdot (i_F - i_S) \cdot (t_i - t_{i-1}) \\ &= N \cdot \sum_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{-it_i} \cdot (i_F - i_S) \cdot (t_i - t_{i-1}). \end{aligned}$$

Nun soll der Wert einer europäischen Payer-Swaption mit Hilfe des Black-Modells ermittelt werden. Das i-te Glied

$$N(t_i - t_{i-1})(i_F - i_S)_+$$

der Auszahlung entspricht dem Wert einer europäischen Call-Option mit Fälligkeit t_i. Gemäß dem Black-Modell (vgl. Abschnitt 2) beträgt der Wert dieser Option zum Zeitpunkt 0

$$N \cdot \mathrm{e}^{-it_i} \cdot (t_i - t_{i-1}) \left[i_F \Phi(d_1) - i_S \Phi(d_2) \right],$$

wobei in Analogie zu (3) gilt

$$d_1 = \frac{\ln \frac{i_F}{i_S} + \frac{1}{2}\sigma_F^2 T}{\sigma_F \sqrt{T}}, \qquad d_2 = \frac{\ln \frac{i_F}{i_S} - \frac{1}{2}\sigma_F^2 T}{\sigma_F \sqrt{T}} = d_1 - \sigma_F \sqrt{T}. \tag{6}$$

Der Forward-Swapsatz i_F errechnet sich aus Beziehung (4), indem d_k durch $\mathrm{e}^{-i(t_i - T)}$ ersetzt wird.
Der Wert der Payer-Swaption P_{PS} selbst ergibt sich aus der Summe über alle einzelnen Call-Optionen (vgl. Beziehung (1):

$$P_{PS} = N \cdot A \cdot \left[i_F \Phi(d_1) - i_S \Phi(d_2) \right],$$

wobei gilt

$$A = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{-it_i}(t_i - t_{i-1})\,. \tag{7}$$

Im Falle einer europäischen Receiver-Swaption gilt unter Beachtung von (2) auf analoge Weise

$$P_{RS} = N \cdot A \cdot [i_S \Phi(-d_2) - i_F \Phi(-d_1)]$$

mit A gemäß (7) und d_1, d_2 aus (6); vgl. hierzu auch [1], [5], [8].

6 Risikokennzahlen und Hedging

Partielle Ableitungen bilden die Grundlage für in der Praxis angewandte spezielle Handels- und Hedgingtechniken von Optionen und Derivaten. Sie quantifizieren das Risiko, das sich durch Änderungen der Einflussfaktoren auf den Optionspreis ergibt. Dadurch sind in vielen Fällen die partiellen Ableitungen mindestens ebenso wichtig wie der theoretisch bestimmte Preis einer Option, denn der Anwender erhält durch sie in kurzer und prägnanter Weise Signale zum Eingehen, Halten oder Glattstellen von Positionen.
Die wichtigsten Risikokenngrößen („Greeks") werden nachfolgend kurz dargestellt und für das betrachtete Produkt, die Swaption, konkretisiert. Anschließend werden kurz einige Handelsstrategien dargestellt. Da die Greeks für beliebige Produkte (speziell natürlich auch für Swaptions) angewendet werden können, werden wir im Folgenden zunächst den Preis eines allgemeinen derivativen Wertpapiers mit D bezeichnen, den Preis des zugrundeliegenden Basiswertes hingegen mit B. Bezüglich des konkreten betrachteten Produkts, der Swaption, heißt das: D ist der Preis P_{PS} der (Payer-) Swaption und B der zugehörige Swap-Preis i_F.

6.1 Risikokennzahlen

6.1.1 Delta

Der Preis einer Swaption hängt bei einer spezifizierten Zinsstruktur und einem vorgegebenen Swap als Basispapier von dem Fälligkeitszeitpunkt T und dem Ausübungspreis S ab (vgl. z. B. [10]). Das Ausmaß der durch die Wertänderung des Swaps induzierten Preisveränderung von Swaptions mit gleichem Basiswert i_S hängt demnach von den Variablen T und i_F ab.
Allgemein wird die Preisänderung eines derivativen Finanzproduktes bezüglich des Preises des Basiswertes durch die Kennzahl Delta beschrieben:

$$\Delta = \frac{\partial D}{\partial B}\,.$$

Die Basisgröße (Underlying) ist im betrachteten Fall der gefixte Forward-IRS-Satz i_F. Für das Delta Δ_{PS} einer europäischen Payer-Swaption gilt dann in Analogie zum Delta eines Aktien-Calls (vgl. z. B. [5], [7])

$$\Delta_{PS} = \frac{\partial P_{PS}}{\partial i_F} = N \cdot A \cdot \Phi(d_1),$$

wobei A gemäß Beziehung (7) definiert ist.
Auf analoge Weise erhält man für das Delta einer europäischen Receiver-Swaption den Wert

$$\Delta_{RS} = N \cdot A \cdot (\Phi(d_1) - 1)\ .$$

6.1.2 Gamma

Das Gamma eines derivativen Finanzproduktes (z. B. einer Swaption oder eines Swaptions enthaltenden Portfolios) ist die zweite Ableitung des Preises des Derivates nach dem Basiswert:

$$\Gamma = \frac{\partial^2 D}{\partial B^2} = \frac{\partial \Delta}{\partial B}\,.$$

Ähnlich wie bei der Größe Delta kann man durch Ableiten eine geschlossene Fomel für Gamma herleiten (vgl. [1], [5]):

$$\Gamma_{PS} = \frac{N \cdot A \cdot \varphi(d_1)}{\sqrt{T} \cdot i_F \cdot \sigma_F}\,,$$

wobei $\varphi(d_1) = \Phi'(d_1)$ die Dichtefunktion der standardisierten Normalverteilung bezeichnet. Gamma gibt die Sensitivität (Änderung) von Delta gegenüber dem Basiswert an. Es misst also, inwiefern oder wie oft eine Position gehedged werden soll (siehe unten Abschnitt 6.2), um ein deltaneutrales Portfolio aufrecht zu erhalten.

6.1.3 Theta

Das Theta eines Portfolios aus derivativen Wertpapieren drückt die durch die Änderung der Restlaufzeit T (verbleibende Zeit bis zur Fälligkeit der Option) induzierte Wertänderung des Portfolios aus:

$$\Theta = \frac{\partial D}{\partial T}\,.$$

Speziell für eine Payer-Swaption erhält man

$$\Theta = \frac{\partial P_{PS}}{\partial T} = -i_T P_{PS} + \frac{N \cdot A \cdot i_F \cdot \sigma_F \cdot \varphi(d_1)}{2\sqrt{T}}\,.$$

6.1.4 Vega

Die durch Änderungen der Volatilität σ hervorgerufenen Wertänderungen eines Derivats (oder Portfolios aus derivativen Finanzprodukten) werden als Vega[6] bezeichnet:

$$V = \frac{\partial D}{\partial \sigma}\,.$$

Speziell für Swaptions erhält man durch Ableiten folgende Beziehung:

$$V_{PS} = V_{RS} = N \cdot A \cdot i_F \cdot \sqrt{T} \cdot \varphi(d_1)\,.$$

Dabei stellt die (implizit auftretende Größe) σ_F eine Einschätzung zukünftig zu erwartender Änderungen des dem Modell zugrundeliegenden Forward-Swapsatzes dar. Ein Vega-Hedge-Portfolio ist also gegen Schwankunggen der Volatilität geschützt.

6.2 Handelsstrategien

6.2.1 Delta-Hedging

Beim so genannten *Delta-Hedging* handelt es sich um eine dynamische Sicherungs-Strategie. Hierbei wird versucht, Preisänderungen des Swaps durch solche der Swaption zu kompensieren, indem man ein Portfolio zusammenstellt, das aus einer Long- (bzw. Short-) Position des Derivats (der Swaption) und einer Short- (bzw. Long-) Position im Umfang des Δ–Fachen des Basiswertes (des Swaps) besteht; dieses nennt man *Hedge-Portfolio*.
Auf diese Weise werden im Portfolio Preisanstiege des Swaps durch Preisnachlässe der Swaption ausgeglichen und umgekehrt. Unsicherheiten, die durch Bewegungen des Basispapiers entstehen, werden somit praktisch eliminiert. Dieses Portfolio hat – wie man leicht nachrechnet – ein Delta von Null (P_{Port} sei der Preis des Portfolios):

$$\Delta_{\text{Port}} = \frac{\partial P_{\text{Port}}}{\partial B} = \Delta \cdot \frac{\partial B}{\partial B} - \frac{\partial D}{\partial B} = \Delta \cdot 1 - \Delta = 0.$$

Durch Delta-Hedgen kann man also (zumindest theoretisch und praktisch weitestgehend) das Risiko eliminieren. Da die Größe Δ sowohl vom Preis des Underlyings als auch von der Restlaufzeit der Swaption abhängt, muss das Basispapier im Portfolio ständig angepasst werden. Solch ein Verfahren wird *dynamisches Hedgen* (oder *Rebalancing*) des Portfolios genannt. Man muss also (theoretisch) ständig Swaps kaufen und verkaufen. Im Falle eines zeitdiskreten Modells wird Delta allerdings nur nach jedem diskreten Zeitintervall Δt wieder angepasst.

[6] kein griechischer Buchstabe, trotzdem wird Vega zu den „Greeks“ gezählt

6.2.2 Delta-Gamma-Hedging

Da Gamma die Änderung der Größe Delta beschreibt, ist für kleine Gamma-Werte die Änderungsrate von Delta gering, so dass Anpassungen des Hedge-Portfolios in größeren Zeitabständen vorgenommen werden können. Umgekehrt gilt für große Gamma-Werte, dass Delta in Bezug auf Änderungen des Basiswertes sehr sensitiv ist, wodurch das Risiko einer Wertveränderung des Portfolios ansteigt.
Das ständige Anpassen oder Rebalancing einer Position ist kostspielig. Um deshalb dasselbe in Grenzen zu halten, bietet sich die Strategie der Gamma-Neutralität an (vgl. [12], [13]). Diese besteht darin, Swaptions zu kaufen und zu verkaufen und nicht den Basiswert, denn dies würde keinen Einfluss auf das Portfolio-Gamma haben, da das Gamma des Underlyings offenbar gleich Null ist:

$$\frac{\partial^2 B}{\partial B^2} = 0, \qquad \text{speziell} \qquad \frac{\partial^2 i_F}{\partial i_F^2} = 0\,.$$

Durch eine Hinzunahme des Basispapiers kann folglich keine Änderung des Gammas der Position erreicht werden, während der Zukauf einer bestimmten Menge an Swaptions Gamma-Neutralität bewirken kann. Durch den Erwerb verschiedener Swaptions ist es möglich, eine gleichzeitig gamma- und delta-neutrale Position aufzubauen.
Betrachten wir ein deltaneutrales Portfolio mit $\Delta_{\text{Port}} = 0$, dessen Gamma gleich Γ ist. Falls eine bestimmte Menge w_0 einer Swaption, die ein Gamma von Γ_0 und ein Delta von Δ_0 besitzt, zum Portfolio hinzugenommen wird, so erhalten wir ein neues Portfoliogamma von

$$\widetilde{\Gamma}_{\text{Port}} = \Gamma + w_0\Gamma_0\,.$$

Ein gammaneutrales Portfolio liegt dann vor, wenn $w_0 = -\dfrac{\Gamma}{\Gamma_0}$ gewählt wird. Durch Hinzunahme der Swaption ändert sich aber auch das Delta des Portfolios. Wegen

$$\widetilde{\Delta}_{\text{Port}} = 0 + w_0\Delta_0 = 0 - \left(\frac{\Gamma}{\Gamma_0}\right)\Delta_0$$

muss die Position durch Hinzukauf der Menge $\widetilde{\Delta}_{\text{Port}}$ des Underlyings (also des Swaps) angepasst werden.
Allerdings bleibt das Portfolio nur für einen kurzen Augenblick gammaneutral und erfordert (theoretisch) eine ständige Anpassung.

6.2.3 Praktisches Vorgehen

In der Praxis werden Portfolios nicht kontinuierlich angepasst, um zu erreichen, dass sie delta-, gamma-, veganeutral usw. sind. Transaktionskosten würden dies extrem kostspielig machen. Vielmehr werden die einzelnen Risiken bewertet, um zu sehen, ob sie akzeptabel sind oder nicht. So spielen die oben behandelten Kennzahlen eine Rolle in der Quantifizierung verschiedener Risikoaspekte von Portfolios. Falls das Risiko akzeptabel ist, wird nichts unternommen. Andernfalls passt man das Portfolio entsprechend den obigen Regeln an.

Literatur

[1] Biermann B.: *Die Mathematik von Zinsinstumenten*, Oldenbourg Verlag, München 1999.

[2] Black F., Derman E. und Toy W.: *A One-Factor Model of Interest Rates and its Application to Treasury Bond Options*, Financial Analysts Journal 1 (1990) 33-39.

[3] Black F., Scholes M.: *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, Journal of Political Economics 81 (1973) 637-654.

[4] Bös M.: *Optionsbewertung und Kapitalmarkt*, Josef Eul, Bergisch Gladbach / Köln 1990.

[5] Grundmann W., Luderer B.: *Formelsammlung Finanzmathematik, Versicherungsmathematik, Wertpapieranalyse*, Teubner, Wiesbaden 2001.

[6] Ho T.S.Y., Lee S.B.: *Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims*, Journal of Finance 41 (1986) 1011-1029.

[7] Hull J.: *Options, Futures and Other Derivative Securities*, Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice Hall 1989.

[8] Kohn R.V.: *Derivative Securities – Section 11*, www.math.nyu.edu/faculty/kohn/derivative.securities/section11.pdf

[9] Luderer B., Zuchanke O.: *Ein einheitlicher Zugang zum Pricing von Swaps*, Preprint 2000–14, Technische Universität Chemnitz.

[10] Rauleder R.: *Bewertung, Anwendungsmöglichkeiten und Hedgingstrategien von Swaptions*, Fritz Knapp Verlag, Frankfurt am Main 1994.

[11] Reißner P.: *Zur analytischen Bewertung von Zinsoptionen*, Verlag Peter Lang, Frankfurt/Main 1991.

[12] Wilmott P., Howison S. und Dewynne J.: *The Mathematics of Financial Derivatives*, Cambridge 1995.

[13] Wilmott P.: *The Black-Scholes Solution and the „Greeks“*, www.ph.qmw.ac.uk/∼oleg/Week9.pdf