PREISBILDUNG IM DYOPOL

BERND LUDERER und ANTJE ZEH

Technische Universität Chemnitz, Fakultät für Mathematik,
09107 Chemnitz, Deutschland

Summary: The well-known oligopoly price problem is considered. Under rather general assumptions concerning the price-response functions of the competitors various strategies are discussed. Especially, some results from the paper [1] are made more precise.

Key words: oligopoly, dyopoly, price adjustment, Nash equilibrium, Stackelberg solution, maximum line, monopoly price, demand function

Mathematics Subject Classification: 91 B 28

1 Problemstellung

Auf zahlreichen Märkten müssen Anbieter berücksichtigen, wie die Mitbewerber auf ihre eigenen Aktionen reagieren. Diese oligopolistische Interdependenz spielt eine wesentliche Rolle im realen Marktgeschehen. Deshalb sind Untersuchungen zum Marktverhalten der Konkurrenten für die praktische Wirtschaftspolitik von großem Interesse.
Zu Preisbildungsproblematik im Oligopol oder Dyopol, auf das ersteres ohne wesentlichen Verlust an theoretischem Gehalt reduziert werden kann, gibt es eine Vielzahl interessanter Publikationen (siehe zum Beispiel [1], [9], [10]). Ziel der vorliegenden Arbeit soll es nicht sein, weitere theoretische Überlegungen zur angesprochenen Problematik beizusteuern; vielmehr soll – in weiten Teilen angelehnt an den bemerkenswerten Beitrag [1] – eine exakte mathematische Fundierung zahlreicher Aussagen vorgenommen werden. Dies umso mehr, als in der wirtschaftswissenschaftlichen Literatur oftmals theoretische Gedankengänge mittels eines konkreten Zahlenbeispiels veranschaulicht werden, ein durchaus probates Mittel. Jedoch sei davor gewarnt, ein Beispiel überzubewerten, denn jedes konkrete Beispiel repräsentiert stets nur einen speziellen Fall.
Wie allgemeingültig sind mithin die in der Literatur zu findenden Aussagen?

Es wird sich zeigen, dass eben so manche Aussage nur im Speziellen gültig ist. Der eingeschlagene Weg der Verallgemeinerung des Problems erlaubt es hingegen, die Gültigkeitsgrenzen der untersuchten Modelle exakt anzugeben.
Im Weiteren soll für zwei Dyopolisten, die auf einem Markt ähnliche Produkte anbieten, kostenlose Produktion unterstellt werden, was vor dem Hintergrund der Suche nach einer gewinnmaximalen Preisstrategie durchaus sinnvoll ist und das gesamte Problem auf das Wesentliche, die *Nachfragefunktionen*, reduziert. Diese drücken die differierenden Präferenzen der Nachfrager aus und sollen im gesamten Beitrag folgende Gestalt haben:

$$\boxed{\begin{array}{l} x_i(p_i, p_j) = a_i - b_i p_i + c_i p_j; \quad i, j = 1, 2;\ i \neq j; \\ a_i > 0,\ \ b_i > c_i > 0,\ \ i = 1, 2 \end{array}} \tag{$*$}$$

Wie üblich mögen x_i die verkauften Mengen und p_i die zugehörigen Preise bezeichnen.
Die Preis-Absatz-Funktionen $(*)$ können als oligopoltypisch angesehen werden, da mit steigendem eigenen Preis die nachgefragte Menge sinkt, währenddessen sie mit steigendem Preis des Konkurrenten wächst. Die Bedingung $b_i > c_i$ bewirkt, dass der Einfluss des eigenen Preises p_i höher einzustufen ist als der des Konkurrenzpreises p_j. Die Linearität der Preis-Absatz-Funktion ist insofern sinnvoll, als dass man sich die tatsächlichen Funktionen (zumindest in der Umgebung einer fixierten Preiskombination) durch Geraden approximiert denken kann.
Das für die Preisbildung zulässige Gebiet wird durch die Forderung nichtnegativer Mengen und Preise begrenzt, so dass einerseits $p_i \geq 0$ für $i = 1, 2$ gelten muss und es andererseits zu jedem vorgelegten Preis p_j des Konkurrenten einen Höchstpreis (*Prohibitivpreis*)

$$p_{iH} = \frac{a_i + c_i p_j}{b_i}, \quad i, j = 1, 2;\ i \neq j \tag{1}$$

gibt, bei dem die Nachfrage x_i nach dem eigenen Gut Null beträgt.
Aus der Annahme kostenloser Produktion resultieren unter Berücksichtigung von $(*)$ die Gewinnfunktionen

$$G_i = p_i \cdot x_i = a_i p_i - b_i {p_i}^2 + c_i p_i p_j, \qquad i, j = 1, 2;\ i \neq j. \tag{2}$$

Die *Reaktionsgeraden*, die den gewinnmaximalen Preis p_i des Dyopolisten i bei gegebenem Preis p_j des Mitanbieters j angeben, erhält man aus der Forderung $\frac{\partial G_i}{\partial p_i} = 0$, woraus wegen (1)

$$p_i = p_{R_i} = \frac{a_i + c_i p_j}{2b_i} = \frac{p_{iH}}{2}, \quad i, j = 1, 2;\ i \neq j \tag{3}$$

folgt. Wegen $\frac{\partial^2 G_i}{\partial p_i^2} = -2b_i < 0$ handelt es sich um gewinn*maximale* Preise.

Die Reaktionsgeraden befinden sich nicht für alle möglichen Konkurrenzpreise im zulässigen Bereich, sondern nur für solche, die unterhalb desjenigen Preises p_j^* liegen, bei dem sich die Reaktionsgerade mit der Begrenzungslinie schneidet. Damit liegt die Reaktionsgerade des Produzenten P_i nur für

$$0 \leq p_j \leq \frac{a_i c_j + 2a_j b_i}{2b_i b_j - c_i c_j} = p_j^* \tag{4}$$

im zulässigen Bereich, für

$$\frac{a_i c_j + 2a_j b_i}{2b_i b_j - c_i c_j} \leq p_j \leq \overline{p}_j = \frac{a_j b_i + a_i c_j}{b_i b_j - c_i c_j} \tag{5}$$

sind die gewinnmaximalen Reaktionspreise hingegen auf dem entsprechenden Gebietsrand zu finden (bei Einhaltung der Modellforderung nichtnegativer Ausbringungsmengen).
Aus diesem Grund müssen statt der Reaktionsgeraden (3) besser folgende *Reaktionsfunktionen* betrachtet werden:

$$p_{R_i} = \begin{cases} \dfrac{a_i + c_i p_j}{2b_i}, & \text{falls} \;\; p_j \in [0, p_j^*], \\[2ex] \dfrac{b_j p_j - a_j}{c_j}, & \text{falls} \;\; p_j \in (p_j^*, \overline{p}_j] \end{cases} \tag{6}$$

(siehe die folgende Abbildung; dieser liegen die Parameter $a_1 = 50$, $b_1 = 0.5$, $c_1 = 0.1$, $a_2 = 30$, $b_2 = 0.5$, $c_2 = 0.2$ zu Grunde, vgl. [1]).

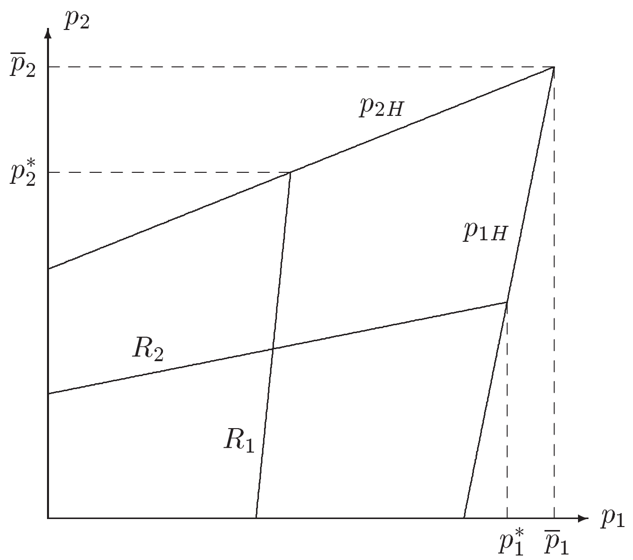

Abbildung 1: Zulässiger Bereich und Reaktionsfunktionen

2 Die Launhardt-Hotelling-Strategie

Gemäß der Launhardt-Hotelling-Strategie wählen beide Dyopolisten ihren Preis auf der Reaktionsgeraden bzw. – exakter – auf der Reaktionskurve. Die aus (6) resultierenden Schnittpunkte, die die Preiskoordinaten der Lösung im Sinne von Launhardt-Hotelling bilden, lauten

$$p_{iL} = \frac{2a_i b_j + a_j c_i}{4b_i b_j - c_i c_j}, \qquad i,j = 1,2;\ i \neq j, \tag{7}$$

$$\overline{p}_i \ = \frac{a_i b_j + a_j c_i}{b_i b_j - c_i c_j}, \qquad i,j = 1,2;\ i \neq j. \tag{8}$$

Der Punkt (p_{1L}, p_{2L}) ist der Schnittpunkt der Reaktionsgeraden. Wegen $p_{R_i} = \frac{p_{iH}}{2}$ liegt er immer im zulässigen Bereich. Andererseits stellt $(\overline{p}_1, \overline{p}_2)$ den Schnittpunkt der Begrenzungsgeraden, also die Ecke des zulässigen Bereichs, dar. Die zugehörigen Gewinne der beiden Dyopolisten betragen für die betrachteten Preiskombinationen

$$G_{iL} = \frac{b_i(2a_i b_j + a_j c_i)^2}{(4b_i b_j - c_i c_j)^2}, \qquad i,j = 1,2;\ \ i \neq j, \tag{9}$$

$$\overline{G}_i \ = 0, \qquad\qquad i = 1,2. \tag{10}$$

Üblicherweise wird nur der erste Punkt (7) als Launhardt-Hotelling-Lösung bezeichnet, da (8) bei einem Gewinn von Null aus ökonomischer Sicht keine ernstzunehmende Alternative darstellt.

Satz 1 *Verhalten sich beide Dyopolisten gemäß ihrer Reaktionsfunktion (6) (Launhardt-Hotelling-Strategie), so konvergieren bei einer beliebigen zulässigen Ausgangspreiskombination* (p_{1_0}, p_{2_0})*, mit Ausnahme von* $(\overline{p}_1, \overline{p}_2)$*, die Preise* (p_{1_n}, p_{2_n}) *für* $n \to \infty$ *gegen die Launhardt-Hotelling-Lösung* (p_{1L}, p_{2L})*. Für das Ausgangspreispaar* $(\overline{p}_1, \overline{p}_2)$ *stagniert der Prozess in diesem Punkt.*

Beweis: Es gelte $(p_{1_0}, p_{2_0}) \neq (\overline{p}_1, \overline{p}_2)$ und (p_{1_0}, p_{2_0}) sei zulässig.
Erste Preisanpassung: O.B.d.A. beginne der zweite Dyopolist damit, die Launhardt-Hotelling-Strategie anzuwenden und setze seinen Preis p_{2_1} gemäß seiner Reaktionsfunktion (6):

$$p_{2_1} = \begin{cases} \dfrac{a_2 + c_2 p_{1_0}}{2b_2}, & \text{falls} \ \ p_{1_0} \in [0, p_1^*], \\[2ex] \dfrac{b_1 p_{1_0} - a_1}{c_1}, & \text{falls} \ \ p_{1_0} \in (p_1^*, \overline{p}_1). \end{cases}$$

Zweite Preisanpassung: Dyopolist 1 passt nun seinen Preis entsprechend der Launhardt-Hotelling-Strategie an, um optimalen Gewinn zu realisieren. Entsprechend seiner Reaktionsfunktion reagiert er auf p_{2_1} mit

$$p_{1_1} = \begin{cases} \dfrac{2a_1b_2 + a_2c_1 + c_1c_2p_{1_0}}{4b_1b_2}, & \text{falls } p_{1_0} \in [0, p_1^*] \quad \wedge \ p_{2_1} \in [0, p_2^*], \\ \dfrac{p_{1_0}}{2} - \dfrac{a_2}{2c_2}, & \text{falls } p_{1_0} \in [0, p_1^*] \quad \wedge \ p_{2_1} \in (p_2^*, \overline{p}_2), \\ \dfrac{p_{1_0}}{2}, & \text{falls } p_{1_0} \in (p_1^*, \overline{p}_1) \wedge p_{2_1} \in [0, p_2^*], \\ \dfrac{b_1b_2p_{1_0} - a_1b_2 - a_2c_1}{c_1c_2}, & \text{falls } p_{1_0} \in (p_1^*, \overline{p}_1) \wedge p_{2_1} \in (p_2^*, \overline{p}_2). \end{cases}$$

Da p_{2_1} in Abhängigkeit von p_{1_0} bestimmt wird, soll nun für die Fälle 1) bis 4) untersucht werden, welche Bedingungen bezüglich p_{1_0} erfüllt sein müssen.

1) Hier gilt $p_{1_0} \in [0, p_1^*]$, $p_{2_1} \in [0, p_2^*]$. Folglich ist $p_{1_0} \leq p_1^* = \dfrac{a_2c_1 + 2a_1b_2}{2b_1b_2 - c_1c_2}$. Wegen $(*)$, (4) und (6) gilt deshalb

$$\begin{aligned} 0 < p_{2_1} &= \frac{a_2 + c_2p_{1_0}}{2b_2} \leq \frac{a_2 + c_2p_1^*}{2b_2} = \frac{a_2 + c_2 \cdot \frac{a_2c_1 + 2a_1b_2}{2b_1b_2 - c_1c_2}}{2b_2} \\ &= \frac{a_2b_1 + a_1c_2}{2b_1b_2 - c_1c_2} < \frac{a_1c_2 + 2a_2b_1}{2b_1b_2 - c_1c_2} = p_2^*. \end{aligned}$$

Liegt also p_{1_0} im Intervall $[0, p_1^*]$, so gilt automatisch $p_{2_1} \in [0, p_2^*]$.

2) In diesem Fall gilt $p_{1_0} \in [0, p_1^*]$. Im Fall 1) wurde gezeigt, dass diese Inklusion immer $p_{2_1} \in [0, p_2^*]$ impliziert, was der Annahme $p_{2_1} \in (p_2^*, \overline{p}_2)$ widerspricht. Fall 2) kann somit nicht auftreten.

3) Im dritten Fall gilt $p_{1_0} \in (p_1^*, \overline{p}_1)$, $p_{2_1} \in [0, p_2^*]$. Auf Grund der zweiten Inklusion mit $p_2^* = \dfrac{a_1c_2 + 2a_2b_1}{2b_1b_2 - c_1c_2}$ sowie der aus (6) resultierenden Beziehung $p_{2_1} = \dfrac{b_1p_{1_0} - a_1}{c_1}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} p_{1_0} &= \frac{c_1p_{2_1} + a_1}{b_1} \leq \frac{c_1p_2^* + a_1}{b_1} = \frac{c_1 \cdot \frac{a_1c_2 + 2a_2b_1}{2b_1b_2 - c_1c_2} + a_1}{b_1} \\ &= \frac{2a_2c_1 + 2a_1b_2}{2b_1b_2 - c_1c_2} =: p_1^{**} < \overline{p}_1. \end{aligned}$$

Wenn also p_{2_1} im Intervall $[0, p_2^*]$ liegt, muss $p_{1_0} \leq p_1^{**}$ gelten. Da ferner $p_1^{**} > p_1^*$ ist, wovon man sich unschwer überzeugt, kann der dritte Fall, dessen Voraussetzungen sich auf $p_{1_0} \in (p_1^*, p_1^{**}]$ reduzieren, im Unterschied zu 2) tatsächlich eintreten.

4) Für den vierten Fall gilt $p_{1_0} \in (p_1^*, \overline{p}_1)$, $p_{2_1} \in (p_2^*, \overline{p}_2)$. Infolge der zweiten Inklusion ergibt sich analog zu Fall 3) die Abschätzung

$$p_{1_0} = \frac{c_1p_{2_1} + a_1}{b_1} > \frac{c_1p_2^* + a_1}{b_1} = \frac{2a_2c_1 + 2a_1b_2}{2b_1b_2 - c_1c_2} = p_1^{**} > p_1^*.$$

Da ferner $p_1^* < \overline{p}_1$ ist, können die Voraussetzungen von Fall 4) zusammengefasst werden zu der Bedingung $p_{1_0} \in (p_1^{**}, \overline{p}_1)$.
Insgesamt lässt sich damit die Reaktion des Dyopolisten 1 auf die Preisfestsetzung p_{2_1} des Dyopolisten 2 wie folgt beschreiben:

$$p_{1_1} = \begin{cases} \dfrac{2a_1b_2 + a_2c_1 + c_1c_2p_{1_0}}{4b_1b_2}, & \text{falls } \; p_{1_0} \in [0, p_1^*], \\ \dfrac{p_{1_0}}{2}, & \text{falls } \; p_{1_0} \in (p_1^*, p_1^{**}], \\ \dfrac{b_1b_2p_{1_0} - a_1b_2 - a_2c_1}{c_1c_2}, & \text{falls } \; p_{1_0} \in (p_1^{**}, \overline{p}_1). \end{cases}$$

Im weiteren soll der Preisfindungsprozess in den drei hergeleiteten Fällen detailliert untersucht werden.
1. Fall: Es gilt $p_{1_0} \in [0, p_1^*]$. Wir werden zeigen, dass man sich bei der sukzessiven Preisanpassung nicht wieder aus dem Intervall $[0, p_1^*]$ heraus bewegt, so dass $p_{1_1} \in [0, p_1^*]$ gilt.

a) Setzt man $p_{1_0} = p_1^* - \varepsilon$ mit $0 \leq \varepsilon \leq p_1^*$, so ergibt sich infolge $(*)$

$$\begin{aligned} p_{1_1} &= \frac{2a_1b_2 + a_2c_1 + c_1c_2p_{1_0}}{4b_1b_2} = \frac{2a_1b_2 + a_2c_1 + c_1c_2(p_1^* - \varepsilon)}{4b_1b_2} \\ &= \frac{2a_1b_2 + a_2c_1 + c_1c_2\left(\frac{2a_1b_2 + a_2c_1}{2b_1b_2 - c_1c_2} - \varepsilon\right)}{4b_1b_2} = \frac{2a_1b_2 + a_2c_1}{2(2b_1b_2 - c_1c_2)} - \frac{c_1c_2}{4b_1b_2}\varepsilon \\ &= \frac{p_1^*}{2} - \frac{c_1c_2}{4b_1b_2}\varepsilon < p_1^*. \end{aligned}$$

b) Ausgehend von a) sowie der generellen Voraussetzung $(*)$ lässt sich p_{1_1} folgendermaßen abschätzen:

$$p_{1_1} = \frac{p_1^*}{2} - \frac{c_1c_2}{4b_1b_2}\varepsilon \geq \frac{p_1^*}{2} - \frac{c_1c_2}{4b_1b_2}p_1^* > \frac{p_1^*}{2} - \frac{p_1^*}{4} > 0.$$

Aus a) und b) folgt $p_{1_1} \in [0, p_1^*]$ und damit natürlich auch $p_{1_k} \in [0, p_1^*]$, $k = 2, 3, \ldots$ Es verbleibt zu untersuchen, welches Resultat die Preisanpassungen innerhalb dieses Intervalls liefern. Wir substituieren

$$\alpha := \frac{2a_1b_2 + a_2c_1}{4b_1b_2} \quad \text{und} \quad \beta := \frac{c_1c_2}{4b_1b_2},$$

wobei wegen $(*)$ die Beziehung $0 < \beta < 1$ gilt, und erhalten

$$\begin{aligned} p_{1_1} &= \alpha + \beta p_{1_0} \\ p_{1_2} &= \alpha + \beta p_{1_1} = \alpha + \alpha\beta + \beta^2 p_{1_0} \\ p_{1_3} &= \alpha + \beta p_{1_2} = \alpha + \alpha\beta + \alpha\beta^2 + \beta^3 p_{1_0} \\ &\vdots \\ p_{1_n} &= \alpha \sum_{k=0}^{n-1} \beta^k + \beta^n p_{1_0}\,. \end{aligned}$$

Auf Grund von $0 < \beta < 1$ gilt mithin

$$\lim_{n\to\infty} p_{1_n} = \alpha \cdot \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \beta^k + \lim_{n\to\infty} \beta^n p_{1_0} = \frac{\alpha}{1-\beta}\,.$$

Nach der Rücksubstitution ergibt sich mit $\lim\limits_{n\to\infty} p_{1_n} = \dfrac{2a_1b_2 + a_2c_1}{4b_1b_2 - c_1c_2}$ genau der Launhardt-Hotelling-Preis p_{1L} aus (7).

2. Fall: Wir werden zeigen, dass aus $p_{1_0} \in (p_1^*, p_1^{**}]$ die Inklusion $p_{1_1} \in [0, p_1^*]$ folgt, so dass nach nur einem Schritt wieder der 1. Fall vorliegt. Tatsächlich, wegen $p_{1_0} \in (p_1^*, p_1^{**}]$ und $(*)$ gilt einerseits

$$p_{1_1} = \frac{p_{1_0}}{2} > \frac{p_1^*}{2} = \frac{a_2c_1 + 2a_1b_2}{2(2b_1b_2 - c_1c_2)} > 0$$

und andererseits

$$p_{1_1} = \frac{p_{1_0}}{2} \le \frac{p_1^{**}}{2} = \frac{a_2c_1 + a_1b_2}{2b_1b_2 - c_1c_2} < \frac{a_2c_1 + 2a_1b_2}{2b_1b_2 - c_1c_2} = p_1^*,$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

3. Fall: Hier gilt $p_{1_0} \in (p_1^{**}, \overline{p}_1)$. Zunächst soll nachgewiesen werden, dass unter dieser Bedingung p_{1_1} stets im zulässigen Bereich liegt. Unter Berücksichtigung von $(*)$ und der Definition von p_1^{**} ergibt sich zum einen

$$\begin{aligned} p_{1_1} &= \frac{b_1b_2p_{1_0} - a_1b_2 - a_2c_1}{c_1c_2} > \frac{b_1b_2p_1^{**} - a_1b_2 - a_2c_1}{c_1c_2} \\ &= \frac{b_1b_2 \cdot \frac{2a_2c_1 + 2a_1b_2}{2b_1b_2 - c_1c_2} - a_1b_2 - a_2c_1}{c_1c_2} = \frac{a_1b_2 + a_2c_1}{2b_1b_2 - c_1c_2} > 0 \end{aligned}$$

und zum anderen

$$\begin{aligned} p_{1_1} &= \frac{b_1b_2p_{1_0} - a_1b_2 - a_2c_1}{c_1c_2} < \frac{b_1b_2\overline{p}_1 - a_1b_2 - a_2c_1}{c_1c_2} \\ &= \frac{b_1b_2 \cdot \frac{a_1b_2 + a_2c_1}{b_1b_2 - c_1c_2} - a_1b_2 - a_2c_1}{c_1c_2} = \frac{a_1b_2 + a_2c_1}{b_1b_2 - c_1c_2} = \overline{p}_1, \end{aligned}$$

so dass $p_{1_1} \in (0, \overline{p}_1)$ gilt, was Zulässigkeit bedeutet.

Nun soll mittels indirekten Beweises gezeigt werden, dass der dritte Fall stets in einen der beiden bereits behandelten Fälle übergeht, so dass also ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$p_{1_k} \in (p_1^{**}, \overline{p}_1),\ k = 1, \ldots, n; \quad p_{1_{n+1}} \in [0, p_1^{**}]. \tag{11}$$

Angenommen, für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $p_{1_n} \in (p_1^{**}, \overline{p}_1)$ gelte $p_{1_{n+1}} \in (p_1^{**}, \overline{p}_1)$. Im zu betrachtenden Fall ist $p_{1_1} = \dfrac{b_1 b_2 p_{1_0} - a_1 b_2 - a_2 c_1}{c_1 c_2}$. Mit der Substitution

$$\gamma := -\frac{a_1 b_2 + a_2 c_1}{c_1 c_2} \quad \text{und} \quad \delta := \frac{b_1 b_2}{c_1 c_2},$$

die wegen $(*)$ $\gamma < 0$ und $\delta > 1$ nach sich zieht, erhält man

$$\begin{aligned}
p_{1_1} &= \gamma + \delta p_{1_0} \\
p_{1_2} &= \gamma + \delta p_{1_1} = \gamma + \gamma\delta + \delta^2 p_{1_0} \\
&\vdots \\
p_{1_{n+1}} &= \gamma \sum_{k=0}^{n} \delta^k + \delta^{n+1} p_{1_0} = \gamma \frac{1 - \delta^{n+1}}{1 - \delta} + \delta^{n+1} p_{1_0} \\
&= \frac{p_{1_0}(1 - \delta) - \gamma}{1 - \delta} \delta^{n+1} + \frac{\gamma}{1 - \delta}.
\end{aligned}$$

Wegen $p_{1_0} \in (p_1^{**}, \overline{p}_1)$ und der Definition von $\overline{p}_1$ gemäß (5) gilt

$$\begin{aligned}
\frac{p_{1_0}(1 - \delta) - \gamma}{1 - \delta} &= p_{1_0} + \frac{\gamma}{\delta - 1} = p_{1_0} + \frac{-a_1 b_2 - a_2 c_1}{b_1 b_2 - c_1 c_2} \\
&< \overline{p}_1 + \frac{-a_1 b_2 - a_2 c_1}{b_1 b_2 - c_1 c_2} = 0,
\end{aligned}$$

so dass der Faktor bei δ^{n+1} negativ ist. Damit ergibt sich $\lim\limits_{n \to \infty} p_{1_{n+1}} = -\infty$, was im Widerspruch zur Gegenannahme steht. Somit ist die Existenz einer Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft (11) nachgewiesen.
Mithin ist gezeigt worden, dass der dritte Fall nach endlich vielen Schritten in einen der beiden ersten Fälle übergeht. Der zweite Fall geht nach nur einem Schritt in den ersten Fall über. Im ersten Fall aber konvergiert der Anpassungsprozess gegen die Launhardt-Hotelling-Lösung (p_{1L}, p_{2L}).
Nun verbleibt noch, die Ausgangspreiskombination $(p_{1_0}, p_{2_0}) = (\overline{p}_1, \overline{p}_2)$ zu betrachten. O.B.d.A. beginne wieder Dyopolist 2 damit, die Launhardt-Hotelling-Strategie anzuwenden und seinen Preis gemäß (6) anzupassen:

$$p_{2_1} = \frac{b_1 p_{1_0} - a_1}{c_1} = \frac{b_1 \cdot \frac{a_1 b_2 + a_2 c_1}{b_1 b_2 - c_1 c_2} - a_1}{c_1} = \frac{a_2 b_1 + a_1 c_2}{b_1 b_2 - c_1 c_2} = \overline{p}_2 = p_{2_0}.$$

Der Preisfestsetzungsprozess stagniert also im Startpunkt, der der Lösung $(\overline{p}_1, \overline{p}_2)$ entspricht. ■
Von besonderem Interesse ist die Beantwortung der Frage, ob die Lösungen (p_{1L}, p_{2L}) und $(\overline{p}_1, \overline{p}_2)$ Gleichgewichte im Sinne von Nash (vgl. [2]) darstellen.

Satz 2 *Im betrachteten Dyopolmodell existieren genau zwei Nash-Gleichgewichte. Dies sind die Launhardt-Hotelling-Lösung (p_{1L}, p_{2L}) sowie die (entartete) Lösung $(\overline{p}_1, \overline{p}_2)$.*

Beweis: a) Wir betrachten die Launhardt-Hotelling-Lösung (p_{1L}, p_{2L}). Die Eigenschaft eines Nash-Gleichgewichts ist äquivalent zur Ungleichung

$$G_i(p_i, p_{jL}) \leq G_i(p_{iL}, p_{jL}) \quad \forall\ p_i \in S_i, \quad i,j = 1,2;\ i \neq j, \tag{12}$$

wobei $S_i = \left\{ p_i : p_{\geq} 0 \wedge p_i \geq \dfrac{b_j p_j - a_j}{c_j} \wedge p_i \leq \dfrac{a_i + c_i p_j}{b_i} \right\}$ die Menge zulässiger Preise für Dyopolist i bezeichne. Unter Berücksichtigung von (2) und (7) gilt

$$G_i(p_i, p_{jL}) = -b_i p_i^2 + \frac{2b_i(2a_i b_j + a_j c_i)}{4b_i b_j - c_i c_j} p_i\,.$$

Damit (12) erfüllt ist, muss diese Gewinnfunktion ihr Maximum für den Launhardt-Hotelling-Preis p_{iL} annehmen. Offensichtlich ist sie streng konkav in p_i und nimmt somit ihr globales Maximum an der Stelle an, wo die Ableitung nach p_i Null ist. Dies ist für

$$p_i^\circ = \frac{2a_i b_j + a_j c_i}{4b_i b_j - c_i c_j}$$

der Fall. Der Preis p_i° ist nach (7) gerade der Launhardt-Hotelling-Preis p_{iL}. Es verbleibt zu zeigen, dass dieses globale Maximum innerhalb des zulässigen Bereichs S_i liegt.
Wegen $(*)$ ist $p_i^\circ \geq 0$ offensichtlich erfüllt. Auch die zweite Ungleichung in S_i ist gültig, denn

$$\begin{aligned} p_i^\circ - \frac{b_j p_{jL} - a_j}{c_j} &= \frac{2a_i b_j + a_j c_i}{4b_i b_j - c_i c_j} - \frac{a_i b_j c_j + a_j c_i c_j - 2a_j b_i b_j}{c_j(4b_i b_j - c_i c_j)} \\ &= \frac{a_i b_j c_j + 2a_j b_i b_j}{c_j(4b_i b_j - c_i c_j)} > 0\,. \end{aligned}$$

Schließlich ist wegen (7) auch die dritte Bedingung in der Definition von S_i erfüllt:

$$p_i^\circ < 2p_i^\circ = \frac{4a_i b_j + 2a_j c_i}{4b_i b_j - c_i c_j} = \frac{a_i + c_i p_{jL}}{b_i}\,.$$

Somit gilt (12) und die Launhardt-Hotelling-Lösung (p_{1L}, p_{2L}) stellt ein Nash-Gleichgewicht dar.

b) Die Lösung $(\overline{p}_1, \overline{p}_2)$ ist ebenfalls ein Nash-Gleichgewicht. Letztere Eigenschaft ist äquivalent zur Gültigkeit der Ungleichung

$$G_i(p_i, \overline{p}_j) \leq G_i(\overline{p}_i, \overline{p}_j) \quad \forall\ p_i \in S_i, \quad i,j = 1,2;\ i \neq j, \tag{13}$$

die offensichtlich erfüllt ist, da hier für jeden Dyopolisten die Strategiemenge nur aus dem einen Punkt $\overline{p}_i$ besteht.

c) Es existiert kein weiteres Nash-Gleichgewicht. Angenommen, die von (p_{iL}, p_{jL}) und $(\overline{p}_i, \overline{p}_j)$ verschiedene Preiskombination (p_{iX}, p_{jX}) sei ein Nash-Gleichgewicht. Dann müsste gelten

$$G_i(p_i, p_{jX}) \leq G_i(p_{iX}, p_{jX}) \quad \forall\ p_i \in S_i, \quad i, j = 1, 2; \;\; i \neq j,$$

was bedeutet, dass der Dyopolist i, $i = 1, 2$, seinen Gewinn für einen festen Preis p_{jX} des Konkurrenten über der Menge aller zulässigen Preise maximiert, indem er den Preis $p_i = p_{iX}$ setzt. Für jeden festen zulässigen Konkurrenzpreis liefert aber gerade die Reaktionsfunktion (6) den gewinnmaximalen eigenen Preis, so dass sich $(p_{iX}, p_{jX}) = (p_{iL}, p_{jL})$ oder $(p_{iX}, p_{jX}) = (\overline{p}_i, \overline{p}_j)$ ergibt. ■

Es handelt sich also bei der Launhardt-Hotelling-Lösung um eine Preiskombination, die ein Gleichgewicht im Sinne Nashs darstellt. Gleichzeitig erhebt sich aber die Frage, ob diese Verhaltensweise mit Gewinnmaximierung wirklich vereinbar ist, denn die Akteure haben stets die Möglichkeit, den Gewinn gegenüber der Cournot-Nash-Lösung zu erhöhen. Dies gelingt sogar unter der Annahme, der Konkurrent verlasse seine Reaktionsgerade nicht, wie im nachfolgenden Punkt gezeigt werden wird.

3 Die Stackelbergsche Asymmetrielösung

Im Unterschied zum Cournot-Modell wird beim Stackelberg-Ansatz [7] von einem asymmetrishen Verhalten ausgegangen: Einer der beiden Produzenten (z. B. i) legt seinen Aktionsparameter zuerst und unter Kenntnis der Reaktionsfunktion des anderen fest. Erst danach sucht der andere Anbieter den entsprechenden Punkt auf seiner Reaktionsfunktion auf. Dyopolist i strebt deshalb an, denjenigen Punkt auf der Reaktionsfunktion seines Konkurrenten herbeizuführen, der für ihn selbst optimal ist. Man sagt deshalb, i befinde sich in der *Unabhängigkeitsposition* und j in der *Abhängigkeitsposition*.
Im weiteren sei j der Dyopolist, der sich immer an seine Reaktionsfunktion hält, und i der unabhängige Akteur. Nach Einsetzen der Reaktionsfunktion (6) für p_j hängt G_i nur noch von p_i ab, und es ergibt sich

$$\max_{p_i \in [0, \overline{p}_i]} G_i = \max \begin{cases} \left(\dfrac{c_i c_j}{2b_j} - b_i \right) p_i^2 + \left(a_i + \dfrac{a_j c_i}{2b_j} \right) p_i, & \text{falls } p_i \in [0, p_i^*], \\ 0, & \text{falls } p_i \in (p_i^*, \overline{p}_i). \end{cases} \tag{14}$$

Aus dem ersten Fall, der offensichtlich auch das Gewinnmaximum für beliebiges $p_i \in [0, \bar{p}_i)$ liefert, erhält man mit Hilfe der notwendigen Maximumbedingung den *Unabhängigkeitspreis*

$$p_{iU} = \frac{2a_i b_j + a_j c_i}{2(2b_i b_j - c_i c_j)} < \frac{2a_i b_j + a_j c_i}{2b_i b_j - c_i c_j} = p_i^*. \tag{15}$$

Der zugehörige *Unabhängigkeitsgewinn* beträgt

$$G_{iU} = \frac{(2a_i b_j + a_j c_i)^2}{8b_j(2b_i b_j - c_i c_j)}\,. \tag{16}$$

Aus p_{iU} kann man nun den zugehörigen *Abhängigkeitspreis* p_{jA} sowie den *Abhängigkeitsgewinn* G_{jA} berechnen:

$$p_{jA} = \frac{a_j(4b_i b_j - c_i c_j) + 2a_i b_j c_j}{4b_j(2b_i b_j - c_i c_j)}, \qquad i,j = 1,2;\ i \neq j, \tag{17}$$

$$G_{A_j} = \frac{\big(2a_i b_i c_j + a_j(4b_i b_j - c_i c_j)\big)^2}{16b_j(2b_i b_j - c_i c_j)^2}, \quad i,j = 1,2;\ i \neq j. \tag{18}$$

Da die Stackelberg-Lösungen stets auf dem Graphen der Reaktionsfunktion (6) des abhängigen Dyopolisten liegen müssen, sind sie auch immer zulässig.

Satz 3 *Unter der Voraussetzung* $(*)$ *gelten für die Preise und Gewinne des Dyopolisten* i, $i = 1,2$, *folgende Ungleichungen:*

$$p_{iL} < p_{iA} < p_{iU}\,, \qquad G_{iL} < G_{iU} < G_{iA}\,.$$

Beweis: a) Der Abhängigkeitspreis ist größer als der Launhardt-Hotelling-Preis, denn auf Grund von $(*)$ gilt

$$p_{iA} - p_{iL} = \frac{c_i^2(a_i c_j^2 + 2a_j b_i c_j)}{4b_i(2b_i b_j - c_i c_j)(4b_i b_j - c_i c_j)} > 0\,.$$

b) Der Unabhängigkeitspreis ist größer als der Abhängigkeitspreis, denn wegen $(*)$ gilt

$$p_{iU} - p_{iA} = \frac{a_i c_i c_j}{4b_i(2b_i b_j - c_i c_j)} > 0\,.$$

c) Der Stackelberg-Gewinn in der Unabhängigkeitsposition ist größer als der mittels Launhardt-Hotelling-Strategie erzielte Gewinn, denn wegen der vorausgesetzten Bedingung $(*)$ gilt

$$G_{iU} - G_{iL} = \frac{c_i^2 c_j^2 (2a_i b_j + c_i a_j)^2}{8b_j(4b_i b_j - c_i c_j)^2(2b_i b_j - c_i c_j)} > 0\,.$$

d) Auch die Differenz aus Abhängigkeits- und Unabhängigkeitsgewinn ist bei Gültigkeit von $(*)$ positiv:

$$G_{iA} - G_{iU} = \frac{c_i^2 c_j(2a_j^2 b_i c_i + 4a_i a_j b_i b_j + a_i^2 b_j c_j)}{16b_i b_j(2b_i b_j - c_i c_j)^2} > 0\,.$$

Damit sind alle Ungleichungen bewiesen. ■

Da für beide Dyopolisten der Abhängigkeitsgewinn größer ist als der Unabhängigkeitsgewinn, kann keine der beiden Stackelberglösungen stabil sein, denn jeder Akteur wird darum bemüht sein, seinen Gegner in die Unabhängigkeitsposition zu „drängen". Somit kann auch der Stackelbergsche Ansatz keineswegs befriedigen. Die dabei erzielten Lösungen sind jedoch Beleg dafür, dass das Launhardt-Hotelling-Konzept nicht die Lösung des Dyopolproblems sein kann, da beide Anbieter gleichzeitig ihre Gewinnsituation gegenüber der Cournot-Nash-Lösung verbessern können.

4 Weitere Strategien

Es soll nun angenommen werden, dass beide Anbieter aus den oben dargestellten Gründen den Abhängigkeitspreis (17) setzen, weil keiner der Unabhängige sein möchte. Diese Preiskombination ist zulässig, denn für $i, j = 1, 2;\ i \neq j$ erhält man

$$0 \leq p_{iA} = \frac{a_i(4b_ib_j - c_ic_j) + 2a_jb_ic_i}{4b_i(2b_ib_j - c_ic_j)} \leq p_{iH} = \frac{a_i + c_ip_{jA}}{b_i}.$$

Die linke Ungleichung gilt wegen $(*)$. Auch die rechte Ungleichung ist erfüllt, denn die Differenz

$$p_{iH} - p_{iA} = \frac{a_ib_j(4b_ib_j - c_ic_j) + a_jc_i(2b_ib_j - c_ic_j)}{4b_ib_j(2b_ib_j - c_ic_j)}$$

ist infolge $(*)$ ebenfalls positiv.
Mit den beiden Abhängigkeitspreisen p_{1A} und p_{2A} ergeben sich für $i, j = 1, 2;$ $i \neq j$ die Gewinne

$$G_{iAA} = \frac{\left[a_i(4b_ib_j - c_ic_j) + 2a_jb_ic_i\right]\left[(a_ib_j(4b_ib_j - c_ic_j) + c_ia_j(2b_ib_j - c_ic_j)\right]}{16b_ib_j(2b_ib_j - c_ic_j)^2},$$

die höher als die Unabhängigkeitsgewinne und niedriger als die Abhängigkeitsgewinne sind, wie nachfolgend gezeigt werden wird. Letztere können allerdings nur erzielt werden, wenn sich der jeweilige Kontrahent freiwillig in die Unabhängigkeitsposition begibt.

Satz 4 *Unter der Voraussetzung $(*)$ gilt für die Gewinne G_{iAA}, die erzielt werden, wenn beide Dyopolisten ihren Abhängigkeitspreis setzen, die Unabhängigkeitsgewinne G_{iU} und die Abhängigkeitsgewinne G_{iA} die Ungleichungskette*

$$G_{iU} < G_{iAA} < G_{iA}, \qquad i = 1, 2\,.$$

Beweis: Auf Grund von $(*)$ lassen sich folgende Abschätzungen angeben:

$$G_{iAA} - G_{iU} = \frac{a_ic_i^2c_j^2(a_ib_j + a_jc_i)}{16b_ib_j(2b_ib_j - c_ic_j)^2} > 0\,.$$

$$G_{iA} - G_{iAA} = \frac{a_j c_i^2 c_j \big(a_i(4b_ib_j - c_ic_j) + 2a_jb_ic_i\big)}{16b_ib_j(2b_ib_j - c_ic_j)^2} > 0\,. \quad \blacksquare$$

In Helmedag [1] wird behauptet, dass beide Anbieter ihren Gewinn nochmals erhöhen könnten, wenn sie, statt jeweils den Abhängigkeitspreis zu setzen, beide ihren Unabhängigkeitspreis fordern würden. Diese Aussage ist falsch, wie unten mit Hilfe eines Gegenbeispiels nachgewiesen wird.
Zunächst stellt man fest, dass die Preiskombination (p_{1U}, p_{2U}) im zulässigen Bereich liegt, da für $i, j = 1, 2;\;\; i \neq j$ gilt:

$$0 \leq p_{iU} = \frac{2a_ib_j + a_jc_i}{4b_ib_j - c_ic_j} \leq p_{iH} = \frac{a_i + c_ip_{jU}}{b_i}\,.$$

In der Tat, die beiden Ungleichungen $p_{iU} \geq 0$ und $p_{iH} - p_{iU} > 0$ resultieren direkt aus $(*)$.
Ferner ergeben sich für die Preiskombination (p_{1U}, p_{2U}) folgende Gewinne $(i, j = 1, 2;\; i \neq j)$:

$$G_{iUU} = \frac{(2a_ib_j + a_jc_i)\big(a_i(2b_ib_j - c_ic_j) + a_jb_ic_i\big)}{4(2b_ib_j - c_ic_j)^2}\,. \tag{19}$$

Diese Gewinne sind niedriger als die jeweiligen Abhängigkeitsgewinne, denn es gilt:

$$G_{iA} - G_{iUU} = \frac{a_i^2 c_i^2 c_j^2}{16b_i(2b_ib_j - c_ic_j)^2} > 0\,.$$

Betrachtet man allerdings die Differenz zwischen den Gewinnen bei beidseitigem Setzen des Unabhängigkeitspreises und denen bei gleichzeitigem Fordern des Abhängigkeitspreises, so erhält man:

$$G_{iUU} - G_{iAA} = \frac{c_i^2 c_j \left[a_ia_j(4b_ib_j - c_ic_j) + 2a_j^2b_ic_i - a_i^2b_jc_j\right]}{16b_ib_j(2b_ib_j - c_ic_j)^2}\,. \tag{20}$$

Diese Differenz ist nicht immer größer Null, wie folgendes Gegenbeispiel belegt.
Gegenbeispiel: Es gelte $a_1 = 10$, $a_2 = 1$, $b_1 = 3$, $b_2 = 5$, $c_1 = 1$ und $c_2 = 4$.
Dann ist $G_{1UU} - G_{1AA} = -\frac{5736}{1557504} < 0$.
Es ist also nicht in jedem Fall günstiger für die Akteure, wenn beide den Unabhängigkeitspreis setzen.
Der Nenner des Ausdrucks (20) ist immer positiv, der Zähler allerdings nur, wenn zusätzlich zu der eingangs geforderten Bedingung $(*)$ noch gewährleistet wird, dass die Forderung

$$\boxed{a_ia_j(4b_ib_j - c_ic_j) + 2a_j^2b_ic_i > a_i^2b_jc_j} \tag{$**$}$$

erfüllt ist. Nur unter dieser zusätzlichen Voraussetzung kann die Behauptung aus [1] aufrechterhalten werden.
Zusammenfassend kann man feststellen, dass es für beide Anbieter zunächst am günstigsten ist, wenn sie:

– den Unabhängigkeitspreis setzen, falls $(**)$ erfüllt ist,
– den Abhängigkeitspreis setzen, falls $(**)$ nicht erfüllt ist.

Noch besser könnte einer der beiden dastehen, wenn sich der andere freiwillig auf die Unabhängigkeitsposition zurückzieht und er selbst die Abhängigkeitsposition einnehmen kann.
Mit dem gemeinsamen Setzen des Abhängigkeits- bzw. Unabhängigkeitspreises verlassen beide Dyopolisten ihre Reaktionsfunktionen. Laut [1] wäre es allerdings „verfehlt, daraus zu schließen, dass die Situation deshalb instabil wäre. Zwar weiß jeder der beiden, dass er durch das isolierte Aufsuchen der Reaktionsfunktion seinen Gewinn vergrößern könnte, allerdings nur, solange der andere Dyopolist nicht reagiert.“
Als Lösung des Dyopolproblems kommen letztendlich nur Preiskombinationen $(\tilde{p}_i, \tilde{p}_j)$ in Frage, für die die folgende Ungleichung gilt:

$$G_i(\tilde{p}_i, \tilde{p}_j) \geq \begin{cases} G_{iAA}, & \text{falls } (**) \text{ nicht erfüllt ist,} \\ G_{iUU}, & \text{falls } (**) \text{ erfüllt ist.} \end{cases} \tag{21}$$

5 Die Maximallinienlösung

Wir folgen im Weiteren der in [1] dargelegten Maximallinienlösung. Dazu werden die *Isogewinnkurven* benötigt, die sich wie folgt beschreiben lassen:

$$a_i p_i - b_i p_i^2 + c_i p_i p_j = \overline{G}_i = \text{const}, \qquad i = 1, 2. \tag{22}$$

Durch Variation der Konstanten auf der rechten Seite erhält man für jeden Dyopolisten eine Schar von Isogewinnkurven. In den folgenden Abbildungen sind einige Isogewinnkurven für beide Dyopolisten eingezeichnet.

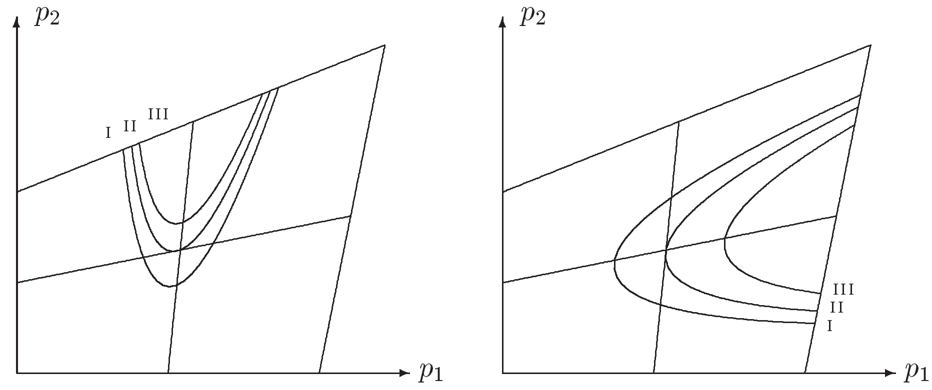

Abbildung 2: Isogewinnkurven für die Dyopolisten 1 bzw. 2

Die Isogewinnkurve II repräsentiert dabei jeweils das Niveau G_{iL} in Gleichung (22). Bei den Isogewinnkurven I (tiefer bzw. links von II liegend) ist das Niveau kleiner, bei den Kurven III (höher bzw. rechts von II liegend) größer als G_{iL}.
Jede zulässige Preiskombination (p_1, p_2) bestimmt die Höhe der Gewinne beider Dyopolisten eindeutig, so dass durch den entsprechenden Punkt jeweils genau eine Isogewinnkurve jedes Dyopolisten verläuft.

5.1 Die Linse

Oben wurde festgestellt, daß als Lösung des Dyopolproblems nur Preiskombinationen $(\tilde{p}_i, \tilde{p}_j)$ akzeptabel sind, für die die Bedingung (21) erfüllt ist. Mit Hilfe der Isogewinnkurven kann man alle entsprechenden Preiskombinationen grafisch darstellen:

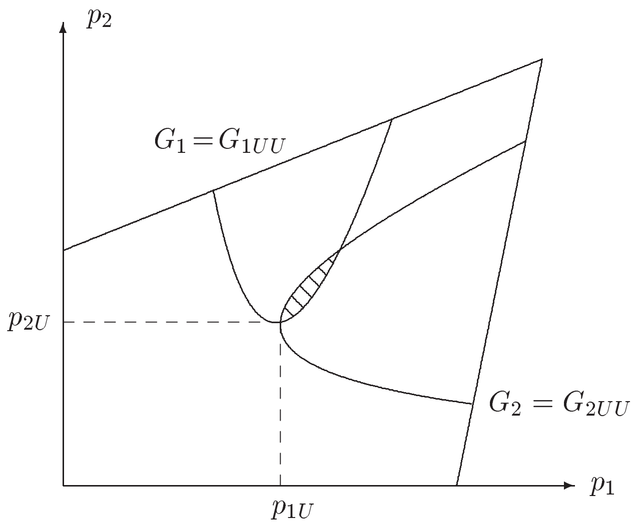

Abbildung 3: Linse als Menge relevanter Preiskombinationen

Die Abbildung bezieht sich auf die auf S. 3 angegebenen konkreten Zahlen, für die die Bedingung $(**)$ erfüllt ist. Deshalb beträgt das Niveau der beiden eingezeichneten Isogewinnkurven $\overline{G}_i = G_{iUU}, i = 1, 2$. Wäre $(**)$ nicht erfüllt, müsste man stattdessen das Niveau G_{iAA} und die zugehörigen Preise betrachten und völlig analoge Überlegungen anstellen, so dass also die Allgemeinheit der Überlegungen in keiner Weise eingeschränkt wird.
Alle Punkte, die oberhalb der G_{1UU}-Kurve bzw. rechts der G_{2UU}-Kurve liegen, bescheren beiden Anbietern einen höheren Gewinn als bei beidseitigem Setzen des Unabhängigkeitspreises. Diese Punkte liegen in dem schraffierten linsenförmigen Gebiet.

Satz 5 *Unter der Voraussetzung $(*)$ existiert eine im zulässigen Bereich gelegene und nicht nur aus (p_{1U}, p_{2U}) bestehende Linse, deren Elemente $(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$ der Eigenschaft (21) genügen.*

Beweis: Es soll lediglich der Fall betrachtet werden, dass die Bedingung $(**)$ erfüllt ist. Die Begrenzungskurven der Linse werden dann durch die Preiskombination (p_{1U}, p_{2U}) generiert. Ist $(**)$ nicht erfüllt ist, erfolgt der Beweis analog mit den Preisen (p_{1A}, p_{2A}).
a) Die Linse ist besteht nicht nur aus (p_{1U}, p_{2U}). In der Tat, setzt man in (22) für $\overline{G}_i$ die Gewinne $G_{i_{UU}}$ ein und stellt nach p_j um, so erhält man die beiden durch den Punkt (p_{U_1}, p_{U_2}) verlaufenden Isogewinnkurven:

$$p_j = \frac{G_{i_U U}}{c_i p_i} + \frac{b_i}{c_i} p_i - \frac{a_i}{c_i}, \qquad i, j = 1, 2, \ i \neq j.$$

Diese sind offenbar konvex bezüglich p_i. Deshalb können sie sich entweder in (p_{1U}, p_{2U}) berühren (dann besteht die Linse nur aus diesem einen Punkt) oder sie besitzen außer (p_{1U}, p_{2U}) noch einen weiteren Schnittpunkt, und es existiert eine wirkliche, nichtentartete Linse.
Angenommen, die beiden Isogewinnkurven berühren sich lediglich im Punkt (p_{1U}, p_{2U}). Dann müssten ihre Tangenten zusammenfallen und damit ihre ersten Ableitungen in diesem Punkt gleich sein. Es gilt

$$\frac{dp_2}{dp_1} = -\frac{G_{1_U U}}{c_1 p_1^2} + \frac{b_1}{c_1}, \qquad \frac{dp_2}{dp_1} = \frac{c_2 p_2^2}{b_2 p_2^2 - G_{2UU}}.$$

Werden diese beiden Gleichungen voneinander subtrahiert und $p_i = p_{iU}$, sowie G_{iUU}, $i = 1, 2$, gemäß (17) bzw. (19) eingesetzt, so ergibt sich

$$\frac{dp_2}{dp_1} - \frac{dp_2}{dp_1} = -2 \cdot \frac{2a_1 a_2 b_1 b_2 + a_2^2 b_1 c_1 + a_1^2 b_2 c_2}{a_2 c_1 (2a_1 b_2 + a_2 c_1)}.$$

Da laut $(*)$ alle Parameter positiv sind, kann die rechte Seite nicht Null werden und keine Gleichheit der Anstiege gelten. Damit ist die obige Annahme falsch und die Linse besteht nicht nur aus einem Punkt.
b) Die Linse liegt im zulässigen Bereich. Dazu wird zunächst gezeigt, dass die durch den Punkt (p_{1U}, p_{2U}) verlaufende Isogewinnkurve des Dyopolisten i, $i = 1, 2$, zwischen der Geraden $p_i = 0$ und der Geraden $p_i = p_{iH} = \dfrac{a_i + c_i p_j}{b_i}$ aus (1) verläuft. Angenommen, dies sei nicht der Fall. Dann muß es einen Schnittpunkt der Isogewinnkurve mit einer der beiden Geraden geben, denn der Punkt (p_{1U}, p_{2U}) liegt – wie früher gezeigt – im zulässigen Bereich und damit zwischen den beiden Geraden.
Nun wird in die Gleichung der Isogewinnkurve

$$a_i p_i - b_i p_i^2 + c_i p_i p_j = G_{iUU}$$

die Größe G_{iUU} gemäß (19) eingesetzt. Ferner wird einmal $p_i = 0$ und einmal $p_i = \dfrac{a_i + c_i p_j}{b_i}$ gesetzt. In beiden Fällen ergibt sich

$$0 \geq \frac{(2a_i b_j + a_j c_i)(a_i(2b_i b_j - c_i c_j) + a_j b_i c_i)}{4(2b_i b_j - c_i c_j)^2},$$

was im Widerspruch zu $(*)$ steht. Demzufolge schneidet die Isogewinnkurve weder die Gerade $p_i = 0$ noch die Gerade $p_i = p_{H_i}$.
Da die Menge M aller die Linsenpunkte sich als $M = M_1 \cap M_2$ mit

$$M_i = \left\{(p_i, p_j) : a_i p_i - b_i p_i^2 + c_i p_i p_j \geq G_{iUU}\right\}, \quad i, j = 1, 2,\ i \neq j$$

darstellen lässt und die Menge M_i, $i = 1, 2$, jeweils den Epigraphen der konvexen Isogewinnkurve von Dyopolist i bildet, der ebenfalls zwischen den Geraden $p_i = 0$ und $p_i = p_{iH}$ liegt, enthält M ausschließlich Punkte, die innerhalb der Begrenzungslinien des zulässigen Bereichs gelegen sind. ■

5.2 Die Maximallinie

Im Weiteren wird neben $(*)$ auch die Gültigkeit der Beziehung $(**)$ vorausgesetzt. Ist letztere nicht erfüllt, hat man anstelle der beidseitigen Unabhängigkeitspreise jeweils die beidseitigen Abhängigkeitspreise zu unterstellen.
Preiskombinationen im Inneren der Linse versprechen beiden Dyopolisten bessere und auf dem Rand der Linse die gleichen Gewinne wie bei gleichzeitigem Setzen des Unabhängigkeitspreises. Gibt es unter diesen ausgezeichnete Punkte, in denen einer der Akteure oder beide ihren Gewinn maximieren können?
Für den Dyopolisten 1 wäre der Punkt der Linse optimal, in dem eine seiner Isogewinnkurven die Linse gerade noch berührt. Dann könnte er seinen Gewinn gegenüber G_{1UU} erhöhen, währenddessen sein Konkurrent auf dem Gewinniveau G_{2UU} stehenbleiben würde. Dieser Punkt soll im Weiteren mit A bezeichnet werden. Für den Dyopolisten 2 gibt es einen analogen Punkt B (siehe Abb. 4).

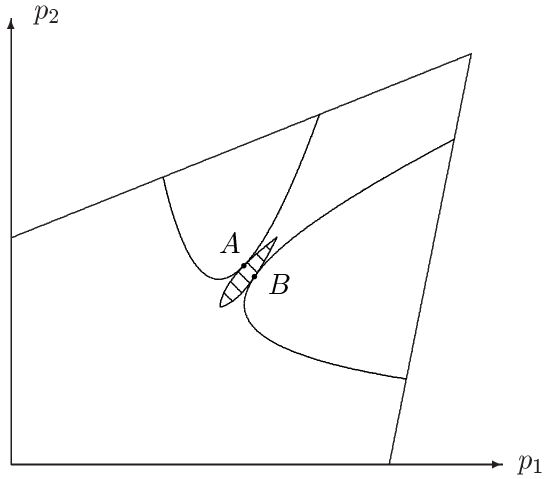

Abbildung 4: Die Punkte A und B als äußere Berührungspunkte

Auch unter den Punkten im Inneren der Linse gibt es welche, die sich im Vergleich zu den anderen auszeichnen. Das sind die Punkte, in denen keiner der beiden Anbieter seinen Gewinn noch weiter erhöhen kann, ohne dabei den

Gewinn seines Konkurrenten zu schmälern, also Pareto-optimale Preiskombinationen. In diesen Punkten müssen sich, wie auch in den Punkten A und B, die Isogewinnkurven beide Akteure gerade noch „von außen“ berühren, d. h., sie dürfen neben dem Berührungspunkt keine weiteren Schnittpunkte haben. Um die Pareto-optimalen Punkte innerhalb der Linse zu berechnen, soll zunächst die Verbindungslinie *aller* Berührungspunkte der Isogewinnkurvenscharen beider Dyopolisten bestimmt werden, die natürlich auch Berührungspunkte außerhalb der Linse enthalten kann.
Notwendige Bedingung für einen Berührungspunkt ist das Vorliegen einer gemeinsamen Tangente an beide Isogewinnkurven. Die Menge aller Berührungspunkte enthält allerdings nicht nur die erwähnten äußeren Berührungspunkte (zu denen A und B gehören), sondern auch Berührungspunkte „von innen“ (siehe Abbildung 5).

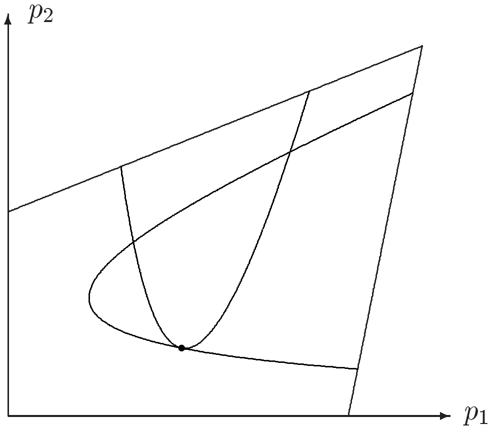

Abbildung 5: Ein innerer Berührungspunkt

Wenn sich Isogewinnkurven von innen berühren, gibt es stets ein Gebiet, in dem die Gewinne für beide Anbieter höher sind als im Berührungspunkt, da sich die Isogewinnkurven in zwei weiteren Punkten schneiden.
Nun sollen die Verbindungslinie aller Berührungspunkte ermittelt werden. Wie man unschwer berechnet (zum Beispiel vermittels des Satzes über die implizite Funktion), betragen die Anstiege der durch (22) definierten Isogewinnkurvenschar des Dyopolisten i

$$\frac{dp_1}{dp_2} = -\frac{c_1 p_1}{a_1 - 2b_1 p_1 + c_1 p_2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{dp_1}{dp_2} = -\frac{a_2 - 2b_2 p_2 + c_2 p_1}{c_2 p_2} \,.$$

Gleichsetzen der Anstiege und Umformung liefert die Beziehung

$$\begin{aligned} -2b_1c_2p_1^2 - 2b_2c_1p_2^2 + (a_1c_2 - 2a_2b_1)p_1 + (a_2c_1 - 2a_1b_2)p_2 \\ +4b_1b_2p_1p_2 + a_1a_2 \;=\; 0\,. \end{aligned} \tag{23}$$

Hierbei handelt es sich um eine Kegelschnittsgleichung. Der Typ des Kegelschnitts lässt sich durch die Untersuchung gewisser Koeffizientendeterminanten feststellen (siehe z. B. [8]).

Unter Berücksichtigung der generellen Voraussetzung $(*)$ handelt es sich wegen

$$A = \begin{vmatrix} -2b_1c_2 & 2b_1b_2 & a_1c_2 - 2a_2b_1 \\ 2b_1b_2 & -2b_2c_1 & a_2c_1 - 2a_1b_2 \\ a_1c_2 - 2a_2b_1 & a_2c_1 - 2a_1b_2 & c_1a_2 \end{vmatrix}$$

$$= 2\big(a_1^2b_2c_1c_2^2 + 2a_1a_2b_1b_2(3b_1b_2 - 2c_1c_2) + a_2^2b_1c_1^2c_2\big) > 0,$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} -2b_1c_2 & 2b_1b_2 \\ 2b_1b_2 & -2b_2c_1 \end{vmatrix} = 4b_1b_2(c_1c_2 - b_1b_2) < 0$$

bei der Beziehung (23) um eine Hyperbelgleichung, so dass die Verbindungslinie aller Berührungspunkte der Isogewinnkurvenscharen eine Hyperbel darstellt. Nun müssen noch die Punkte auf der Hyperbel gefunden werden, die bei beidseitiger Gewinnmaximierung von Interesse sind.
Beziehung (23) kann als quadratische Gleichung in p_2 dargestellt werden:

$$p_2^2 + \frac{2a_1b_2 - a_2c_1 - 4b_1b_2p_1}{2b_2c_1}p_2 + \frac{2b_1c_2p_1^2 + (2a_2b_1 - a_1c_2)p_1 - a_1a_2}{2b_2c_1} = 0.$$

Die Lösung dieser Gleichung lautet

$$\begin{aligned} p_{2_{1,2}} = {} & \frac{a_2c_1 - 2a_1b_2}{4b_2c_1} + \frac{b_1}{c_1}p_1 \\ & \pm\sqrt{p_1^2 + \frac{a_1c_1c_2 - 2a_1b_1b_2 - a_2b_1c_1}{2b_1(b_1b_2 - c_1c_2)}p_1 + \frac{a_2^2c_1^2 + 4a_1^2b_2^2 + 4a_1a_2b_2c_1}{16b_1b_2(b_1b_2 - c_1c_2)}}. \end{aligned} \tag{24}$$

Die Diskriminante in (24) entspricht einer nach oben offenen Parabel mit den Nullstellen

$$\begin{aligned} p_{1_{1,2}} = {} & \frac{a_1(2b_1b_2 - c_1c_2) + a_2b_1c_1}{4b_1(b_1b_2 - c_1c_2)} \\ & \pm \frac{c_1}{4b_1(b_1b_2 - c_1c_2)}\sqrt{\frac{c_2(2a_1a_2b_1b_2 + a_1^2b_2c_2 + a_2^2b_1c_1)}{b_2}}. \end{aligned} \tag{25}$$

Da die Diskriminante in (25) gemäß $(*)$ immer positiv ist, hat die quadratische Funktion in (24) stets zwei reelle Nullstellen p_{1_1} und p_{1_2}, wobei $p_{1_1} < p_{1_2}$ gelten soll. Damit ist die Diskriminante in (24) für alle $p_1 < p_{1_1}$ und für alle $p_1 > p_{1_2}$ positiv. Für diese p_1-Werte erhält man also zwei, für die beiden Nullstellen p_{1_1} und p_{1_2} einen und für die p_1-Werte, die zwischen den beiden Nullstellen liegen, keinen p_2-Wert als Lösung von (23). Der Hyperbelast für $p_1 \leq p_{1_1}$ wird als *optimale Drohkurve* bezeichnet (vgl. [6]) und enthält die Berührungspunkte von innen, weswegen er bei beidseitiger Gewinnmaximierung nicht von Interesse ist. Der zweite Hyperbelast, für den $p_1 \geq p_{1_2}$ gilt, ist die *Maximallinie* (siehe Abbildung 6).

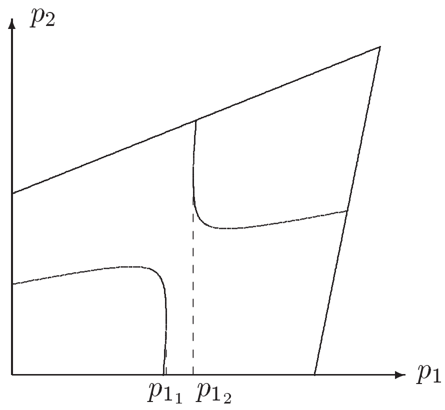

Abbildung 6: Drohkurve und Maximallinie

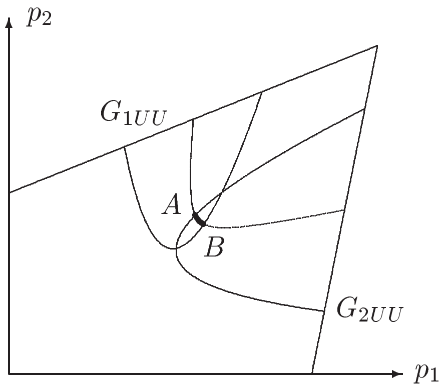

Abbildung 7: Die Dyopollösung

Die Maximallinie ist die Verbindungslinie der äußeren Berührungspunkte und damit der geometrische Ort aller Pareto-Optima. Auf dieser Linie liegen somit alle Preiskombinationen, bei denen der Gewinn eines der beiden Produzenten für konstante Gewinne des anderen Produzenten maximal ist. Als Lösung des Dyopolproblems bei beidseitiger Gewinnmaximierung kommen also alle Preiskombinationen in Frage, die sowohl auf der Maximallinie als auch innerhalb der in Abbildung 3 dargestellten Linse liegen. Vorausgesetzt, die Bedingung (∗∗) ist erfüllt, so sind das alle Preiskombinationen (p_1, p_2), die die Beziehungen (23), $p_1 \geq p_{1_2}$ sowie $a_i p_i - b_i p_i^2 + c_i p_i p_j \geq G_{iUU}$, $i = 1, 2$ erfüllen. Ist jedoch (∗∗) nicht gültig, so sind in den letzten beiden Ungleichungen anstelle von G_{iUU} die Größen G_{iAA} einzusetzen.

In Abbildung 7 sind die möglichen Lösungen fett hervorgehoben. Welche der errechneten und dort eingezeichneten Preiskombinationen am Ende wirklich realisiert wird, ist unklar. Für den Dyopolisten 1 wäre der Punkt A am günstigsten, für den Dyopolisten 2 hingegen der Punkt B. Mit hoher Wahrscheinlichkeit werden sich beide Anbieter ungefähr auf halber Strecke treffen und so einen Gewinn erzielen, der für beide akzeptabel ist.

Wie kommen die beiden Dyopolisten zu einer dieser Preiskombinationen? Dies könnte iterativ erfolgen, indem sie – ausgehend vom Punkt (p_{1UU}, p_{2UU}) – versuchen, gemeinsam auf beidseitig höhere Gewinniveaus zu gelangen. Das gelingt so lange, bis eine Preiskombination erreicht wird, in der sich die durch diese Preiskombination bestimmten Isogewinnkurven beider Dyopolisten gerade noch tangieren und nicht mehr schneiden. Diese Preiskombination liegt aber auf der Maximallinie. Wenn dann die Preise erneut verändert würden, wäre das zumindest für einen der Dyopolisten mit Gewinneinbußen verbunden. Insofern sind die einzelnen Preiskombinationen der Maximallinienlösung nicht instabil, obwohl es sich bei keiner dieser Preiskombinationen um ein Gleichgewicht im Sinne Nashs handelt. Für diesen Weg zur Maximallinie sind auch keine Absprachen zwischen den Akteuren notwendig, beide betreiben lediglich Gewinnmaximierung unter Berücksichtigung ihrer

strategischen Interdependenz.
Schließlich wird in [11] – eine Behauptung aus [1] untermauernd – detailliert nachgewiesen, dass im zulässigen Bereich die beiden Hyperbeläste zwischen den Reaktionsgeraden verlaufen; außerhalb des zulässigen Bereiches trifft dies nur auf die Maximallinie zu.

5.3 Die Monopolpunkte

Berechnet man die Schnittpunkte der Hyperbel mit denjenigen Begrenzungslinien des zulässigen Bereichs, die nicht durch die Koordinatenachsen gebildet werden, also durch die Beziehungen (1) gegeben sind, so erhält man nach kurzer Rechnung vier Punkte, von denen allerdings nur zwei im zulässigen Bereich gelegen sind. Deren Koordinaten lauten

$$M_1 = \left(\frac{a_1 b_2 + a_2 c_1}{2(b_1 b_2 - c_1 c_2)}, \frac{a_2(2b_1 b_2 - c_1 c_2) + a_1 b_2 c_2}{2b_2(b_1 b_2 - c_1 c_2)} \right),$$

$$M_2 = \left(\frac{a_1(2b_1 b_2 - c_1 c_2) + a_2 b_1 c_1}{2b_1(b_1 b_2 - c_1 c_2)}, \frac{a_2 b_1 + a_1 c_2}{2(b_1 b_2 - c_1 c_2)} \right).$$

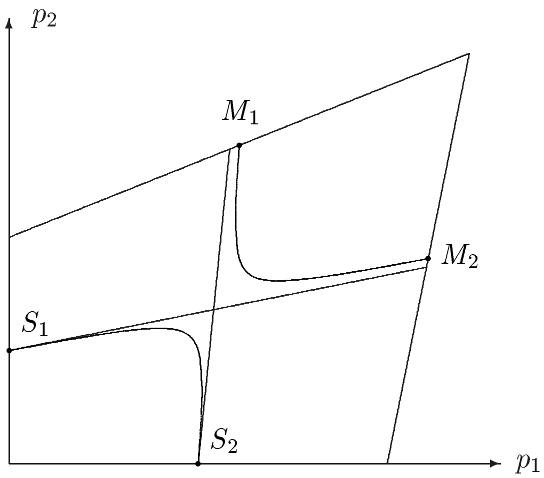

Abbildung 8: Monopolpunkte und Schnittpunkte mit den Reaktionsgeraden

In [11] wird der Nachweis geführt, dass unter der Voraussetzung $(*)$ die Punkte M_1 und M_2 auf der Maximallinie liegen. Ferner erweist es sich, dass es sich bei M_i, $i = 1, 2$, um die beiden *Monopolpunkte* handelt, d. h. um diejenigen Preiskombinationen, bei denen der Dyopolist j seinen Prohibitivpreis p_{jH} setzt, währendessen Dyopolist i am Ziel der Gewinnmaximierung festhält.
Tatsächlich, setzt man für $i, j = 1, 2$; $i \neq j$, in die Gewinnfunktion des

Akteurs i anstelle von p_j den Prohibitivpreis p_{jH} ein, so erhält man:

$$G_i = \Big(\frac{c_i c_j}{b_j} - b_i\Big)p_i^2 + \Big(\frac{a_j c_i}{b_j} + a_i\Big)p_i\,. \tag{26}$$

Da Dyopolist i nach maximalem Gewinn strebt, hat man die Ableitung nach p_i Null zu setzen und erhält die Lösungen

$$p_{iM_i} = \frac{a_i b_j + a_j c_i}{2(b_i b_j - c_i c_j)}\,, \qquad p_{jM_i} = \frac{a_j(2b_i b_j - c_i c_j) + a_i b_j c_j}{2b_j(b_i b_j - c_i c_j)}\,,$$

$i = 1, 2$, die mit den Koordinaten der Punkte M_1 und M_2 übereinstimmen; die beiden Monopolpunkte sind also die Endpunkte der Maximallinie im zulässigen Bereich (siehe Abb. 8).
Die Gewinne der beiden Dyopolisten im Monopolpunkt M_i betragen

$$G_{iM_i} = \frac{(a_i b_j + a_j c_i)^2}{4b_j(b_i b_j - c_i c_j)}, \qquad G_{jM_i} = 0. \tag{27}$$

Wegen $(*)$ ist der Gewinn des Dyopolisten i in M_i positiv; er wird immer kleiner, je weiter man sich auf der Maximallinie vom Monopolpunkt M_i entfernt, und wird Null, wenn der Monopolpunkt M_j des Konkurrenten j erreicht ist.
In der nachfolgenden Abbildung ist die Reise von M_1 nach M_2 entlang der Maximallinie dargestellt. Zu sehen sind die Verläufe der Gewinne G_1 und G_2 sowie deren Schnittpunkte mit G_{1UU} und G_{2UU}, die auf der Maximallinie den Punkten A und B entsprechen (vgl. Abbildung 7).

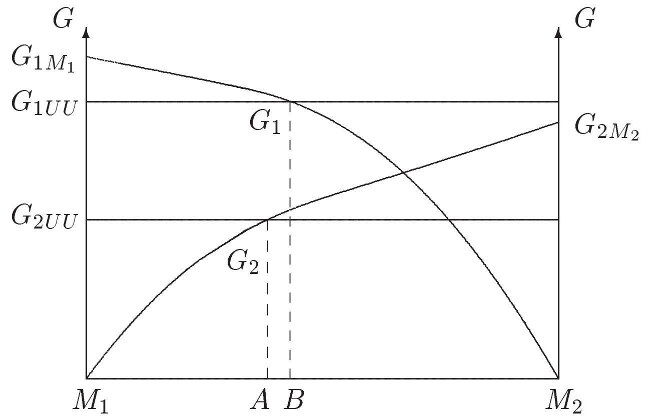

Abbildung 9: Entlang der Maximallinie von M_1 nach M_2

Im Gegensatz zu der entsprechenden Abbildung in [1] weisen hier die Gewinnfunktionen keine Unstetigkeitsstellen auf, was wegen ihrer Struktur (2) bei einer stetigen Preisänderung auch nicht möglich ist. Vermutlich kommen die Unstetigkeitsstellen in [1] durch Rundungsfehler bei der Berechnung der Kurven zustande.

5.4 Das Gesamtgewinnmaximum

Auf der Hyperbel liegt noch ein weiterer interessanter Punkt, nämlich das *Gesamtgewinnmaximum*. Das ist die Preiskombination, bei der die Summe der Gewinne beider Dyopolisten maximal ist. Nach (2) hat die Gesamtgewinnfunktion G_{ges} folgende Gestalt:

$$G_{\text{ges}}(p_1,p_2)=G_1+G_2=-b_1p_1^2-b_2p_2^2+a_1p_1+a_2p_2+(c_1+c_2)p_1p_2. \tag{28}$$

Im Optimum muss notwendigerweise $\nabla G_{\text{ges}} = \mathbf{0}$ gelten, woraus man

$$(\hat{p}_1,\hat{p}_2) = \left(\frac{2a_1b_2 + a_2(c_1+c_2)}{4b_1b_2 - (c_1+c_2)^2}, \frac{2a_2b_1 + a_1(c_1+c_2)}{4b_1b_2 - (c_1+c_2)^2}\right) \tag{29}$$

erhält. In diesem Punkt liegt tatsächlich ein Maximum vor, wenn die Hesse-Matrix $\begin{pmatrix} -2b_1 & c_1+c_2 \\ c_1+c_2 & -2b_2 \end{pmatrix}$ von G_{ges} negativ definit ist, was für

$$4b_1b_2 > (c_1+c_2)^2 \tag{$***$}$$

der Fall ist. Dies ist aber durch die Voraussetzung $(*)$ nicht automatisch gewährleistet. Ist jedoch $(***)$ erfüllt, so handelt es bei (29) um die Preiskoordinaten des Gesamtgewinnmaximums; anderenfalls muss das Gesamtgewinnmaximum auf dem Gebietsrand gesucht werden. Dieser Fall wird hier nicht weiter verfolgt, sondern die Gültigkeit von $(***)$ unterstellt.
Es bleibt noch zu zeigen, daß sich das Gesamtgewinnmaximum auch im zulässigen Bereich befindet. Tatsächlich, bei Gültigkeit von $(***)$ gilt automatisch $\hat{p}_i > 0, \quad i = 1,2$. Ferner gilt mit p_{iH} gemäß (1) und $(***)$ weiterhin

$$\begin{aligned} p_{iH}-\hat{p}_i &= \frac{a_i + c_i\hat{p}_j}{b_i} - \frac{2a_ib_j + a_j(c_i+c_j)}{4b_ib_j - (c_i+c_j)^2} = \frac{a_i(4b_ib_j - c_ic_j - c_j^2) + 2a_jb_ic_i}{b_i\big(4b_ib_j - (c_i+c_j)^2\big)} \\ &> \frac{a_i\big(4b_ib_j - (c_i+c_j)^2\big) + 2a_jb_ic_i}{b_i\big(4b_ib_j - (c_i+c_j)^2\big)} > 0\,, \end{aligned}$$

so dass $(\hat{p}_1,\hat{p}_2)$ im zulässigen Bereich liegt. Für dieses Preispaar ergibt sich der (maximale) Gesamtgewinn

$$\hat{G}_{\text{ges}} = \frac{a_1^2b_2 + a_1a_2(c_1+c_2) + b_1a_2^2}{4b_1b_2 - (c_1+c_2)^2}\,, \tag{30}$$

sowie die Einzelgewinne

$$G_i = \frac{[2a_ib_j + a_j(c_i+c_j)]\,[a_i\,(2b_ib_j - c_j(c_i+c_j)) + a_jb_i(c_i-c_j)]}{\big(4b_ib_j - (c_i+c_j)^2\big)^2}\,, \tag{31}$$

$i = 1,2$. Setzt man (beispielsweise mit Hilfe eines Computeralgebraprogramms) die Preiskombination $(\hat{p}_1,\hat{p}_2)$ aus (29) in die Hyperbelgleichung

(23) ein, so bestätigt sich, dass das Gesamtgewinnmaximum auf dieser Hyperbel liegt.

Oben wurde bemerkt, dass die Drohkurve die Reaktionsgeraden schneidet, während die Maximallinie keine Schnittpunkte mit den Reaktionsgeraden hat. Das bedeutet aber, dass die Maximallinie „rechts" von der Reaktionsgeraden R_1 und „oberhalb" der Reaktionsgeraden R_2 liegen muss. Da die Schnittpunkte der Drohkurve mit den Reaktionsgeraden am Rand bzw. außerhalb des zulässigen Bereiches liegen, muss die Drohkurve im zulässigen Bereich hingegen „links" von R_1 und „unterhalb" von R_2 liegen.

Ist folglich $\hat{p}_1$ größer als der p_1-Wert, der sich ergibt, wenn man $\hat{p}_2$ in die Gleichung der Reaktionsgeraden R_1 einsetzt, so liegt das Gesamtgewinnmaximum $(\hat{p}_1, \hat{p}_2)$ „rechts" von R_1 und damit auf der Maximallinie.

Einsetzen von $\hat{p}_2$ in die Gleichung (3) der Reaktionsgeraden R_1 liefert

$$p_{1R} = \frac{a_1 + c_1\hat{p}_2}{2b_1} = \frac{a_1(4b_1b_2 - c_1c_2 - c_2^2) + 2a_2b_1c_1}{2b_1\big(4b_1b_2 - (c_1+c_2)^2\big)} \,.$$

Bildet man die Differenz zwischen $\hat{p}_1$ und diesem p_{1R}, ergibt sich

$$\begin{aligned}\hat{p}_1 - p_{1R} &= \frac{2a_1b_2 + a_2(c_1+c_2)}{4b_1b_2 - (c_1+c_2)^2} - \frac{a_1(4b_1b_2 - c_1c_2 - c_2^2) + 2a_2b_1c_1}{2b_1\big(4b_1b_2 - (c_1+c_2)^2\big)} \\ &= \frac{c_2\big(2a_2b_1 + a_1(c_1+c_2)\big)}{2b_1\big(4b_1b_2 - (c_1+c_2)^2\big)} \,.\end{aligned}$$

Diese Differenz ist positiv, wenn $4b_1b_2 > (c_1+c_2)^2$ gilt. Dies ist genau die Bedingung $(***)$, die erfüllt sein muss, damit das Gesamtgewinnmaximum bei der Preiskombination $(\hat{p}_1, \hat{p}_2)$ angenommen wird.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass unter der zusätzlichen Voraussetzung $(***)$ das Gesamtgewinnmaximum auf der Maximallinie liegt. Diese Bedingung $(***)$ ist offensichtlich erfüllt, wenn man – was durchaus sinnvoll erscheint – von einheitlichen „Fluktuationskoeffizienten" $c_1 = c_2 = c$ mit $c < b_1$ und $c < b_2$ ausgeht.

Von Interesse wäre es noch herauszufinden, ob das Gesamtgewinnmaximum auch innerhalb der Linse liegt. In dem bisher stets betrachteten Zahlenbeispiel (siehe S. 3), das auch allen Abbildungen zugrunde liegt, ist das Gesamtgewinnmaximum außerhalb der Linse zu finden. Es gibt jedoch auch andere Zahlenbeispiele, für die das Gesamtgewinnmaximum innerhalb der Linse liegt, z. B. $a_1 = a_2 = 50$, $b_1 = b_2 = 0.5$, $c_1 = c_2 = 0.1$. Eine brauchbare Bedingung dafür zu finden, wann das Gesamtgewinnmaximum innerhalb und wann es außerhalb der Linse liegt, ist ein interessantes, zur Zeit aber noch offenes Problem.

Literatur

[1] Helmedag, F.: Gleichgewicht im heterogenen Oligopol, Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik 208/1, 50-66 (1991)

[2] Nash, J.: Non-cooperative games, Annals of Mathematics 54, 286-295 (1951)

[3] Ott, A. E.: *Grundzüge der Preistheorie*. 3. Auflage. Vandenhoeck & Ruprecht: Göttingen 1992

[4] Ott, A. E.: Gewinnmaximierung, Reaktionshypothese und Gleichgewichtsgebiet beim unvollkommenen Dyopol, Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik 175, 428-440 (1963)

[5] Schöler, K.: Zum Problem konsistenter konjekturaler Variationen im Oligopol, Jahrbuch für Sozialwissenschaft 40, 160-170 (1989)

[6] Seitz, T.: Bemerkungen zur Dyopoltheorie Krelles. Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik 174, 430-451 (1962)

[7] Stackelberg, H. v.: *Marktform und Gleichgewicht*. Wien, Berlin: 1934

[8] *Teubner-Taschenbuch der Mathematik*. Hrsg. Zeidler, E. Stuttgart, Leipzig: Teubner 1996

[9] Varian, H.R.: *Grundzüge der Mikroökonomik*. 4. Auflage. München, Wien: Oldenbourg 1999

[10] Wagner, A.: *Mikroökonomik*, Stuttgart: Lucius und Lucius 1997

[11] Zeh, A.: Untersuchungen zur Preisbildung auf einem heterogenen oligopolistischen Markt. Diplomarbeit. TU Chemnitz, Fakultät für Mathematik (2000)