

TECHNISCHE UNIVERSITÄT CHEMNITZ-ZWICKAU

Konstruktion eines modifizierten Sobel–Wald–Tests

K.-H. Eger, S. Oehlke

Preprint 97-2

Fakultät für Mathematik

1 Einleitung

Häufig treten Problemstellungen auf, die die gleichzeitige Entscheidung zwischen mehr als zwei Hypothesen erfordern. So ist möglicherweise in Abhängigkeit von der Arbeitsweise einer Maschine sofort deren Neueinstellung notwendig, wenn die produzierten Teile nach unten von der vorgegebenen Größe abweichen, während eine begrenzte Abweichung nach oben nur eine verstärkte Kontrolle erfordert. Sind die gefertigten Teile maßgerecht, kann der Prozeß ohne Eingriffe fortgesetzt werden.

Zur Lösung von Problemen zur gleichzeitigen Entscheidung zwischen mehr als zwei Hypothesen $H_i : \theta = \theta_i, \theta \in \Theta$ wurden in der Vergangenheit verschiedene Testverfahren entwickelt. Einige dieser Verfahren kombinieren sequentielle Likelihoodquotiententests und bauen auf deren optimalen Eigenschaften auf. Sequentielle Likelihoodquotiententests besitzen unter allen Tests, deren Wahrscheinlichkeiten, die Hypothese H_1 unter der Bedingung $\theta = \theta_1$ abzulehnen, bzw. die Hypothese H_1 unter der Bedingung $\theta = \theta_2$ anzunehmen, kleiner oder gleich einem Wert α bzw. β sind, einen minimalen mittleren Stichprobenumfang sowohl für $\theta = \theta_1$ als auch für $\theta = \theta_2$. Für andere Testverfahren bilden Konfidenzintervalle oder Signifikanztests die Basis.

SOBEL und WALD [15] konstruierten aus zwei sequentiellen Likelihoodquotiententests ein Verfahren zur Entscheidung zwischen drei Hypothesen über den Mittelwert einer normalverteilten Zufallsgröße. GHOSH erweiterte in [4] das von SOBEL und WALD vorgeschlagene Verfahren auf Tests über den Parameter einer zur Exponentialfamilie gehörenden Verteilung. Grundlegend dafür ist die Einhaltung einer notwendigen und hinreichenden Bedingung, der sogenannten Verträglichkeitsbedingung, durch die Testbegrenzungen, um widersprüchliche Testaussagen, wie die gleichzeitige Annahme mehrerer Hypothesen, auszuschließen. Zusätzlich gab er genauere obere Schranken für den mittleren Stichprobenumfang als in [15] an. EGER [2] verallgemeinerte den Sobel-Wald-Test zu einem sequentiellen Test zur Entscheidung zwischen $h, h \geq 2$ Hypothesen über den Parameter einer zur Exponentialfamilie gehörenden diskreten Verteilung. Für diese Verteilungen beschrieb er ein exaktes Verfahren zur Bestimmung der Charakteristiken des Tests. Mit dem Ziel, die Beobachtungskosten zu minimieren, führte MEYER [9] einen sequentiell geplanten (gruppierten) Sobel-Wald-Test ein und nutzte für die Bestimmung der Testcharakteristiken das in [2] angegebene Verfahren.

Die Operationscharakteristik (OC-Funktion) und der mittlere Stichprobenumfang dienen als wesentliche Kriterien zur Einschätzung der Güte eines Tests. Somit ist deren Kenntnis Voraussetzung für die Bewertung der Qualität der getroffenen Entscheidung sowie für eine Abschätzung der zu erwartenden Testkosten. Ein im Sinne des SLQT optimales Testverfahren existiert für Tests zwischen mehr als zwei Hypothesen bisher nicht.

In dieser Arbeit wird ein Verfahren zur Modifikation des Sobel-Wald-Tests beschrieben, das es ermöglicht, die von GHOSH in [4] geforderte Einhaltung der Verträglichkeitsbedingung bei der Aufstellung der Grenzen des Tests zu umgehen. Diese Modifikation des Sobel-Wald-Tests bewirkt bei gleicher Testgüte einen geringeren Testaufwand als im ursprünglichen Sobel-Wald-Test. Damit stellt der modifizierte Sobel-Wald-Test eine Verbesserung gegenüber diesem dar.

2 Einführung

2.1 Grundlagen zum Sobel-Wald-Test

Gegeben sei eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsgrößen X_1, X_2, \dots mit der Dichtefunktion

$$p_\theta(x) = P_\theta(X = x) = w(x) \exp(d(\theta)x - c(\theta))$$

bezüglich eines geeignet gewählten Maßes μ auf der Menge der ganzen Zahlen \mathbf{Z} . Dabei bezeichne θ einen reellwertigen Parameter mit Werten in einer Parametermenge $\Theta \subseteq \mathbb{R}_1$. $c(\theta)$ und $d(\theta)$ seien auf Θ definierte, monotone Funktionen.

Es sei zwischen den Hypothesen

$$H_1 : \theta = \theta_1, H_2 : \theta = \theta_2, \dots H_h : \theta = \theta_h, \quad h \geq 2$$

mit $\theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_h$ und $\theta_j \in \Theta$ zu entscheiden. Dazu werden im weiteren entsprechend der von SOBEL und WALD [15] vorgeschlagenen Verfahrensweise $h - 1$ sequentielle Likelihoodquotiententests (SLQT) S_j , $j = 1, \dots, h - 1$, betrachtet, die jeweils die Hypothesen $H_j : \theta = \theta_j$ und $H_{j+1} : \theta = \theta_{j+1}$ gegeneinander prüfen.

Als Testgröße für den Test S_j dient die Folge der Likelihoodquotienten

$$L_{n,\theta_j,\theta_{j+1}} = \prod_{i=1}^n \frac{p_{\theta_{j+1}}(X_i)}{p_{\theta_j}(X_i)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Der SLQT S_j wird auf Grundlage der Beobachtungsfolge X_1, X_2, \dots fortgesetzt, solange sich die Testgröße innerhalb vorgegebener Stoppgrenzen B_j und A_j mit $0 < B_j < 1 < A_j < \infty$ befindet. Er endet mit der Annahme der Hypothese H_j , bzw. mit der Annahme von H_{j+1} , sobald auf der Stufe n erstmals $L_{n,\theta_j,\theta_{j+1}} \leq B_j$, bzw. $L_{n,\theta_j,\theta_{j+1}} \geq A_j$ gilt.

Für den Stichprobenumfang N_j und die Entscheidungsregel δ_j zum SLQT S_j gilt dann

$$N_j = \inf \{n \geq 1 : L_{n,\theta_j,\theta_{j+1}} \notin (B_j, A_j)\}$$

und

$$\delta_j = \mathbb{1}_{\{L_{N,\theta_j,\theta_{j+1}} \geq A_j\}}$$

Im Fall $\delta_j = 0$ erfolgt die Annahme der Hypothese H_j , ist dagegen $\delta_j = 1$, erfolgt die Annahme von H_{j+1} .

Für die oben betrachtete Exponentialfamilie ist es im Hinblick auf die weitere Beschreibung des SLQT sowie des SWT zweckmäßig, zunächst zum Logarithmus des Likelihoodquotienten

$$Z_n^{(j)} = \ln L_{n,\theta_j,\theta_{j+1}} = \sum_{i=1}^n \ln \frac{p_{\theta_{j+1}}(X_i)}{p_{\theta_j}(X_i)} = (d(\theta_{j+1}) - d(\theta_j)) \sum_{i=1}^n X_i - n(c(\theta_{j+1}) - c(\theta_j))$$

überzugehen. Wird die Funktion $d(\theta)$ als streng monoton wachsend angenommen, so modifiziert sich die sogenannte kritische Ungleichung zum SLQT S_j ,

$$B_j < L_{n,\theta_j,\theta_{j+1}} < A_j$$

für $n = 1, 2, \dots$ über

$$\ln B_j < Z_n^{(j)} < \ln A_j$$

unter Berücksichtigung der für die Funktionen $c(\theta)$ und $d(\theta)$ vorausgesetzten Monotonie zu

$$\frac{\gamma_{0j}}{\gamma_{1j}}n + \frac{\ln B_j}{\gamma_{1j}} < \sum_{i=1}^n X_i < \frac{\gamma_{0j}}{\gamma_{1j}}n + \frac{\ln A_j}{\gamma_{1j}} \quad (1)$$

$$\text{mit } \gamma_{1j} = d(\theta_{j+1}) - d(\theta_j) \quad \text{und} \quad \gamma_{0j} = c(\theta_{j+1}) - c(\theta_j) .$$

Wird außerdem

$$b_j(n) = \frac{\gamma_{0j}}{\gamma_{1j}}n + \frac{\ln B_j}{\gamma_{1j}} \quad \text{und} \quad a_j(n) = \frac{\gamma_{0j}}{\gamma_{1j}}n + \frac{\ln A_j}{\gamma_{1j}}$$

gesetzt, so sind die Beobachtungen beim Test S_j solange fortzusetzen, wie für $n = 1, 2, \dots$ die Ungleichungen

$$b_j(n) < \sum_{i=1}^n X_i < a_j(n) \quad (2)$$

erfüllt sind. Falls $d(\theta)$ streng monoton fallend ist, verlaufen die Umformungen analog. Für die weiteren Betrachtungen des Tests S_j wird stets die Form (2) gewählt.

Jedem SLQT S_j läßt sich eine Gitterpunktmenge

$$M_j := \{(n, k) : n \in \mathbf{N}, k \in \mathbf{Z} \quad \text{und} \quad b_j(n) < k < a_j(n)\}$$

zuordnen, die als dessen Fortsetzungsbereich bezeichnet wird. Für den Stichprobenumfang N_j zum Test S_j gilt damit

$$N_j = \inf \left\{ n \geq 1 : \left(n, \sum_{i=m+1}^n X_i \right) \notin M_j \right\} .$$

Der mittlere Stichprobenumfang

$$E_\theta N_j$$

entspricht dem Erwartungswert für den Stichprobenumfang zum SLQT S_j . Die OC-Funktion

$$q_j(\theta) = 1 - E_\theta(\delta_j)$$

beschreibt die Wahrscheinlichkeit für die Annahme der Hypothese H_j durch den SLQT S_j in Abhängigkeit vom tatsächlichen Wert des Parameters θ .

Zur sequentiellen Entscheidung zwischen h Hypothesen

$$H_1 : \theta = \theta_1, H_2 : \theta = \theta_2, \dots H_h : \theta = \theta_h, \quad h \geq 2$$

die die Bedingung $\theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_h$, $\theta_j \in \Theta$, $j = 1, \dots, h$ erfüllen, werden im weiteren in Verallgemeinerung der von SOBEL und WALD [15] für $h = 3$ vorgeschlagenen und von GHOSH [4] erweiterten Verfahrensweise die oben betrachteten SLQT S_1, \dots, S_{h-1} zu einem sequentiellen Entscheidungsverfahren miteinander verknüpft, das im weiteren als verallgemeinerter Sobel-Wald-Test (SWT) bezeichnet wird.

In diesem Verfahren werden zunächst unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß die Stoppgrenzen B_j , A_j der einzelnen SLQT S_j so gewählt sind, daß

$$\frac{\ln B_j}{\gamma_{1j}} \leq \frac{\ln B_{j+1}}{\gamma_{1j+1}} \quad \text{und} \quad \frac{\ln A_j}{\gamma_{1j}} \leq \frac{\ln A_{j+1}}{\gamma_{1j+1}}, \quad j = 1, \dots, h-2 \quad (3)$$

gilt, die Tests S_j , $j = 1, \dots, h-1$, parallel auf Grundlage der Beobachtungsfolge X_1, X_2, \dots durchgeführt. Nach jeder Beobachtung wird überprüft, ob eine der folgenden Entscheidungen möglich ist:

Auf der Beobachtungsstufe n , $n = 1, 2, \dots$ erfolgt die Annahme von

- H_1 , falls S_1 die Hypothese H_1 auf dieser Stufe annimmt,
- H_{j+1} , falls diese Hypothese bis zur Stufe n durch S_j und S_{j+1} , $j = 1, \dots, h-2$, angenommen wird,
- H_h , falls S_{h-1} die Hypothese H_h auf dieser Stufe annimmt.

Ist keine dieser Entscheidungen möglich, so wird der Test mit der $(n+1)$ ten Beobachtung fortgesetzt. Als Stichprobenumfang für den SWT ergibt sich dann

$$N = \max\{N_1, \dots, N_h\}$$

und als Entscheidungsregel

$$\delta = 1 + \sum_{j=1}^{h-1} \delta_j$$

Entsprechend der Definition der Entscheidungsregeln δ_j für jeden einzelnen SLQT S_j kann δ die Werte $1, 2, \dots, h$ annehmen. Es erfolgt eine Entscheidung für die Hypothese H_j genau dann, wenn $\delta = j$ gilt.

Mit der von GHOSH [4] und EGER [3] benutzten Bedingung (3) wird eine Verträglichkeit der SLQT S_1, \dots, S_{h-1} untereinander erreicht. Sich widersprechende Entscheidungen wie z.B. die gleichzeitige Annahme der Hypothesen H_i, H_{i+x} , $x > 0$, durch den SWT S sind ausgeschlossen, da wegen (3) die Annahme der Hypothese H_j durch den SLQT S_j stets die vorherige Beendigung aller Tests S_i mit $i > j$ durch die Annahme von H_i voraussetzt. Bedingung (3) wird im weiteren auch als Verträglichkeitsbedingung bezeichnet. Sie führt häufig entweder zu einem erhöhten mittleren Stichprobenumfang oder zu erhöhten Fehlerwahrscheinlichkeiten. Die weiteren Kapitel dieser Arbeit enthalten eine Begründung für diese Erscheinungen und beschreiben eine Möglichkeit, diese Probleme durch eine Modifikation der Stoppgrenzen der SLQT S_j weitestgehend zu vermeiden.

Es bezeichnen $Q^{(j)}(\theta)$, $j = 1, \dots, h$ die OC-Funktionen zum SWT S , die die Wahrscheinlichkeit für die Annahme der Hypothesen H_j in Abhängigkeit vom tatsächlichen Wert des Parameters θ beschreiben. Zwischen den OC-Funktionen $q_j(\theta) = 1 - E_\theta(\delta_j)$ der einzelnen SLQT S_1, \dots, S_{h-1} und denen des aus diesen SLQT gebildeten SWT $Q^{(j)}(\theta)$ bestehen Zusammenhänge, die eine direkte Bestimmung der OC-Funktionen $Q^{(j)}(\theta)$ aus $q_j(\theta)$ ermöglichen.

Satz 1 Es seien S_j , $j = 1, \dots, h - 1$ SLQT, die die Verträglichkeitsbedingung (3) erfüllen und es bezeichne $q_j(\theta)$ die OC-Funktion des j -ten Einzeltests S_j . Die OC-Funktionen $Q^{(j)}(\theta)$ des SWT S lassen sich dann folgendermaßen aus denen der Einzeltests bestimmen:

$$\begin{aligned} Q^{(1)}(\theta) &= q_1(\theta), \\ Q^{(j)}(\theta) &= q_j(\theta) - q_{j-1}(\theta) \quad j = 2, \dots, h - 1, \\ Q^{(h)}(\theta) &= 1 - q_{h-1}(\theta) \end{aligned}$$

Beweis: Siehe [3], Lemma 4.1. □

Für diskrete Verteilungen, die der oben betrachteten Verteilungsfamilie angehören, ist die exakte Berechnung der OC-Funktionen $q_j(\theta)$ bzw. $Q^{(j)}(\theta)$ mit der in [2] angegebenen Methode möglich, falls die Quotienten $\frac{\gamma_{0j}}{\gamma_{1j}}$, $j = 1, \dots, h - 1$ rational sind. Eine Methode zur exakten Bestimmung der OC-Funktionen $q_j(\theta)$ bzw. $Q^{(j)}(\theta)$ für die ebenfalls zur Exponentialfamilie gehörende Erlangverteilung ist in [16] sowie in [7] beschrieben.

Es bezeichne $E_\theta N$ den mittleren Stichprobenumfang zum SWT S . Zwischen diesem und den mittleren Stichprobenumfängen $E_\theta N_j$ der Tests S_j gilt nach [3]:

$$\max_{1 \leq j \leq h-1} E_\theta N_j \leq E_\theta N \leq \sum_{j=1}^{h-1} E_\theta N_j$$

Die für diese Abschätzung benötigten mittleren Stichprobenumfänge $E_\theta N_j$ zu den SLQT S_j können für die betrachtete Verteilungsfamilie im Fall diskreter Verteilungen unter der Voraussetzung (3) wie in [3] berechnet werden. Weiterhin sind in [16] und in [7] Verfahren zur Bestimmung des mittleren Stichprobenumfanges eines SLQT enthalten. Direkte Methoden zur Bestimmung des mittleren Stichprobenumfanges eines SWT für den Fall diskreter zur Exponentialfamilie gehöriger Verteilungen werden in den Arbeiten [2], [10] und [11] beschrieben.

2.2 Konstruktion eines Sobel-Wald-Tests

In diesem Abschnitt werden zunächst Möglichkeiten angegeben, das Trennverhalten von SLQT bzw. SWT zu charakterisieren. Daran schließen sich Überlegungen zur Konstruktion der Tests unter Berücksichtigung der Forderungen an das Trennverhalten an.

Zu den Kenngrößen, die das Trennverhalten eines SLQT charakterisieren, zählen im wesentlichen die OC-Funktion sowie der mittlere Stichprobenumfang. Für die Beurteilung der Eigenschaften eines SWT können ähnliche Kenngrößen wie beim SLQT herangezogen werden. Dabei ist zu beachten, daß sich vorgegebene Werte für die Kenngrößen nur erreichen lassen, wenn diese Vorgaben bereits bei der Konstruktion des Tests berücksichtigt werden.

Die OC-Funktion eines SLQT S_j beschreibt die Wahrscheinlichkeit für die Annahme der Hypothese $H_j : \theta = \theta_j$ in Abhängigkeit vom Wert des Parameters θ . Da eine vollständige Bestimmung der OC-Funktion nicht in jedem Fall notwendig oder möglich ist, erfolgt die Beschreibung der Trenngüte eines Tests häufig nur anhand von zwei Werten der OC-Funktion, $q_j(\theta_j)$ und $q_j(\theta_{j+1})$. Der Wert $1 - q_j(\theta_j)$ entspricht dabei der Wahrscheinlichkeit, die Hypothese H_j abzulehnen, obwohl $\theta = \theta_j$ gilt. In diesem Fall spricht man von einem Fehler erster Art. Die Wahrscheinlichkeit dafür sei $\alpha_j = 1 - q_j(\theta_j)$. Weiter entspricht $q_j(\theta_{j+1})$ der Wahrscheinlichkeit für die Annahme der Hypothese H_j , obwohl der Parameter θ gleich

Für einen SWT zur Entscheidung zwischen h Hypothesen existieren h OC-Funktionen $Q^{(j)}(\theta)$, die jeweils die Wahrscheinlichkeit für die Annahme der Hypothese $H_j : \theta = \theta_j$, $j = 1, \dots, h$ in Abhängigkeit vom Wert des Parameters θ angeben.

Aus diesen OC-Funktionen läßt sich in Analogie zum Vorgehen bei SLQT wiederum der Funktionswert $Q^{(j)}(\theta_j)$ herausgreifen. Unter einem Fehler erster Art bei einem SWT versteht man den Fall, daß die Hypothese $H_j : \theta = \theta_j$ abgelehnt wird, obwohl $\theta = \theta_j$ ist. Die zugehörige Wahrscheinlichkeit sei $\alpha^{(j)} = 1 - Q^{(j)}(\theta_j)$.

Entsprechend der Definition des Ablaufes eines SWT erfolgt eine Entscheidung gegen die Hypothese H_j dann, wenn diese entweder durch den SLQT S_j oder durch S_{j-1} abgelehnt wird. Da nach Satz 1 die OC-Funktionen $Q^{(j)}(\theta)$ eines SWT aus den OC-Funktionen der Einzeltests $q_j(\theta)$ bestimmt werden können, ergibt sich für die Fehlerwahrscheinlichkeiten $\alpha^{(j)}$ im SWT:

$$\alpha^{(j)} = \begin{cases} 1 - q_1(\theta_1) & = \alpha_1 & j=1 \\ 1 - (q_j(\theta_j) - q_{j-1}(\theta_j)) & = \alpha_j + \beta_{j-1} & 2 \leq j \leq h-1 \\ 1 - (1 - q_j(\theta_{j+1})) & = \beta_{h-1} & j=h \end{cases} \quad (6)$$

Endet ein SWT mit der Annahme der Hypothese H_j , obwohl der Parameter θ gleich einem der Werte $\theta_1, \dots, \theta_{j-1}, \theta_{j+1}, \dots, \theta_h$ ist, dann wird diese Entscheidung als Fehler zweiter Art bezeichnet. Dieser Fall tritt nur dann ein, wenn zuvor die Hypothese $H_i : \theta = \theta_i$ abgelehnt wurde. Dabei handelt es sich jedoch um einen Fehler erster Art mit der zugehörigen Wahrscheinlichkeit $\alpha^{(i)}$. Es bezeichne $\beta^{(j)}$ die Wahrscheinlichkeit für die Annahme der Hypothese H_j , obwohl $\theta = \theta_i$, $i \neq j$ ist. Dann gilt

$$\begin{aligned} \beta^{(j)} &\leq \alpha^{(i)} && \text{bzw.} \\ \beta^{(j)} &\leq \max_i \alpha^{(i)} \end{aligned} \quad (7)$$

Die Wahrscheinlichkeiten für Fehler zweiter Art sind damit in einem SWT in keinem Fall größer als die Maximalwahrscheinlichkeit, einen Fehler erster Art zu begehen. Ein SWT wird im weiteren als zulässig bezeichnet, wenn $\alpha^{(j)} \leq \alpha$, $j = 1, \dots, h$ gilt. α sei dabei ein vorgegebener Maximalwert für die Wahrscheinlichkeit für Fehler erster Art.

Der mittlere Stichprobenumfang eines Tests bezeichnet die mittlere zu erwartende Anzahl der zur Entscheidung für eine der Hypothesen erforderlichen Beobachtungen. Da die Kosten eines Tests im wesentlichen durch den Stichprobenumfang bestimmt werden, wird angestrebt, dessen Erwartungswert, den mittleren Stichprobenumfang möglichst gering zu halten. Beim SLQT ist der mittlere Stichprobenumfang umso kleiner, je schmaler der Fortsetzungsbereich, d.h., je kleiner die Differenz $a_j(n) - b_j(n)$, $n \geq 0$ ist. Der mittlere Stichprobenumfang zu einem SWT ist durch die Ungleichung

$$\max_{1 \leq j \leq h-1} E_\theta N_j \leq E_\theta N \leq \sum_{j=1}^{h-1} E_\theta N_j$$

abschätzbar. Damit ist er ebenfalls abhängig von der Breite der Fortsetzungsbereiche der entsprechenden Einzeltests.

Jeder SWT soll nun so konstruiert werden, daß er zum einen zulässig ist, d.h. die vorgegebenen Schranken für die Wahrscheinlichkeiten für Fehler erster Art einhält und zum

θ_{j+1} ist. Dieser Fall wird als Fehler zweiter Art bezeichnet, die Wahrscheinlichkeit dafür sei $\beta_j = q_j(\theta_{j+1})$.

Die Trenngüte eines SLQT ist umso höher, je kleiner die Werte für α_j und β_j sind. Im allgemeinen ist es jedoch ausreichend, wenn die Fehlerwahrscheinlichkeiten gewisse maximal zulässige Werte für α_j und β_j nicht überschreiten.

Die Fehlerwahrscheinlichkeiten hängen direkt von den Stoppgrenzen A_j und B_j , $j = 1, \dots, h-1$ ab. Daraus ergibt sich die Notwendigkeit, die Stoppgrenzen entsprechend der Forderungen bezüglich α_j und β_j zu bestimmen. Ein häufig verwendetes Verfahren ist die Waldsche Näherung. Sie gestattet eine Bestimmung der OC-Funktionen eines SLQT S_j , $q_j(\theta)$, derart, daß

$$q_j(\theta_j) \approx 1 - \alpha_j \quad \text{und} \quad q_j(\theta_{j+1}) \approx \beta_j,$$

ist, falls die Stoppgrenzen A_j und B_j zu vorgegebenen Wahrscheinlichkeiten α_j und β_j wie folgt gewählt werden:

$$B_j = \frac{\beta_j}{1 - \alpha_j}, \quad A_j = \frac{1 - \beta_j}{\alpha_j} \quad (4)$$

Die sich daraus ergebenden Grenzen $b_j(n)$ und $a_j(n)$, die jeweils die Fortsetzungsbereiche M_j definieren, sind zusätzlich von der konkreten Form der vorliegenden Wahrscheinlichkeitsfunktion sowie von den Werten für θ_j , θ_{j+1} abhängig, da

$$b_j(n) = \frac{\ln B_j}{\gamma_{1j}} + n \frac{\gamma_{0j}}{\gamma_{1j}} \quad \text{und} \quad a_j(n) = \frac{\ln A_j}{\gamma_{1j}} + n \frac{\gamma_{0j}}{\gamma_{1j}} \quad \text{gilt,} \quad (5)$$

$$\text{mit} \quad \gamma_{1j} = d(\theta_{j+1}) - d(\theta_j), \quad \gamma_{0j} = c(\theta_{j+1}) - c(\theta_j).$$

Die Abhängigkeit der Stoppgrenzen $a_j(n)$ und $b_j(n)$ von der vorliegenden Wahrscheinlichkeitsfunktion und den Werten θ_j und θ_{j+1} wird in folgendem Beispiel verdeutlicht. Falls die Zufallsgröße $X(t, \theta)$ binomialverteilt, $t \in \mathbb{N}$ ist, gilt

$$\gamma_{0j} = t \ln \left(\frac{1 - \theta_j}{1 - \theta_{j+1}} \right) \quad \text{und} \quad \gamma_{1j} = \ln \left(\frac{\theta_{j+1}(1 - \theta_j)}{\theta_j(1 - \theta_{j+1})} \right).$$

Der Wert γ_{1j} beeinflusst die Breite des Fortsetzungsbereiches M_j , wie in (5) ersichtlich. Diese wird dann maximal, wenn γ_{1j} minimal ist. Das Minimum von γ_{1j} läßt sich durch Null-Setzen der ersten Ableitung von γ_{1j} nach θ_j , γ'_{1j} bestimmen. Man erhält:

$$\gamma'_{1j} = \frac{-d(1 - d - 2\theta_j)}{(\theta_j + d(1 - \theta_j))(\theta_j(1 - \theta_j - d))}, \quad d = \theta_{j+1} - \theta_j$$

Die Ableitung γ'_{1j} wird dann gleich Null, wenn $1 - d - 2\theta_j = 0$ ist, d.h. für $\theta_j^* = \frac{1-d}{2}$. Die zweite Ableitung γ''_{1j} ist an der Stelle θ_j^* größer als Null und bestätigt damit $\gamma_{1j}(\theta_j^*)$ als Minimalpunkt.

Folglich benötigt ein SLQT S_j , falls $\theta_j + \frac{d}{2} \approx 0,5$ ist, einen breiteren Fortsetzungsbereich M_j als für $\theta_j + \frac{d}{2} < 0,5$ oder $\theta_j + \frac{d}{2} > 0,5$, um die gleichen Fehlerwahrscheinlichkeiten α_j und β_j zu erreichen.

anderen einen minimalen mittleren Stichprobenumfang besitzt. Für SLQT sind diese Forderungen erfüllt, wenn die Stoppgrenzen A_j und B_j mit Hilfe der Waldschen Näherung (4) bestimmt werden. Der mittlere Stichprobenumfang ist dann im Vergleich mit anderen Tests, die gleiche Fehlerwahrscheinlichkeiten erbringen, für $\theta = \theta_j$ sowie für $\theta = \theta_{j+1}$ minimal.

Da die Wahrscheinlichkeiten für Fehler erster und zweiter Art im SWT durch die Fehlerwahrscheinlichkeiten in den Einzeltests bestimmt werden, liegt der Gedanke nahe, die Mechanismen zur Bestimmung der Stoppgrenzen von SLQT auf die Wahl der Stoppgrenzen eines SWT zu übertragen. Das ist jedoch nicht ohne Einschränkungen möglich, da die Stoppgrenzen $a_j(n)$ und $b_j(n)$ in (5) häufig die Verträglichkeitsbedingung (3) verletzen, wenn sie nur unter Berücksichtigung der Schranken für die Fehlerwahrscheinlichkeiten konstruiert werden.

Verfahren zur Wahl dieser Stoppgrenzen, die auf der Waldschen Näherung beruhen, gaben SOBEL und WALD [15] sowie GHOSH [4] für $h = 3$ an. Beide Varianten eignen sich nicht als Verfahren zur Bestimmung der Stoppgrenzen für SWT über mehr als 3 Hypothesen. SOBEL und WALD [15] nutzen einschränkende Voraussetzungen bezüglich der Symmetrie der zu testenden Hypothesen. GHOSH bestimmt die Stoppgrenzen zunächst nur in Abhängigkeit vorgegebener Fehlerwahrscheinlichkeiten mit Hilfe eines linearen Gleichungssystems. Die so gewonnenen Stoppgrenzen werden nachträglich auf die Einhaltung der Verträglichkeitsbedingung geprüft. Wie aus dem oben dargestellten Beispiel ersichtlich wird, verletzen die Stoppgrenzen nur in Abhängigkeit von den Fehlerwahrscheinlichkeiten konstruierter Tests die Verträglichkeitsbedingung jedoch häufig. Ein zulässiger SWT kann dann nur durch eine nachträgliche Verbreiterung der Fortsetzungsbereiche einzelner SLQT gebildet werden. Für den mittleren Stichprobenumfang eines aus mehreren SLQT zusammengesetzten SWT gilt nach [3]

$$E_{\theta}N(n, k) \geq \max_j E_{\theta}N_j(n, k).$$

Die Zahl der Beobachtungen in einem SWT ist demzufolge nach unten durch die in den einzelnen Tests erforderliche Anzahl von Beobachtungen begrenzt. Damit widerspricht die Verbreiterung der Fortsetzungsbereiche der einzelnen SLQT zur Konstruktion eines zulässigen SWT wegen des damit verursachten hohen mittleren Stichprobenumfangs dem Wunsch nach einem effizienten Testverfahren.

Eine allgemeingültige Vorgehensweise zur Bestimmung der Stoppgrenzen für einen SWT über $h \geq 3$ Hypothesen ist bisher nicht bekannt, da sich die für die Einhaltung der Verträglichkeitsbedingung erforderlichen Voraussetzungen insbesondere für mehr als 3 Hypothesen nur schwer mit den Forderungen bezüglich der Fehlerwahrscheinlichkeiten verbinden lassen.

In der vorliegenden Arbeit wird eine modifizierte Form des SWT vorgestellt, die zum einen eine einfache Bestimmung der Stoppgrenzen des Tests erlaubt und zum anderen zu einer Verringerung des mittleren Stichprobenumfangs im Vergleich zu einem SWT, der die gleichen Fehlerwahrscheinlichkeiten besitzt, führt.

3 Die Konstruktion eines modifizierten Sobel-Wald-Tests

In diesem Abschnitt wird ein Verfahren zur Konstruktion eines SWT vorgestellt, in dessen Verlauf zunächst die Zulässigkeit des Tests im Vordergrund steht. Die Einhaltung

der Verträglichkeitsbedingung wird dann später gegebenenfalls durch eine Modifikation des Tests erzwungen.

Die Konstruktion der einzelnen SLQT orientiert sich dabei an den Forderungen bezüglich der Fehlerwahrscheinlichkeiten α_j und β_j . Bei der Zusammenfassung der Einzeltests zu einem SWT tritt häufig eine Verletzung der Verträglichkeitsbedingung auf, wegen der Voraussetzung $\theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_h$ jedoch nur während der ersten n^* Beobachtungsstufen. Deshalb wird ihre Einhaltung hier durch eine nur lokale Anpassung der Stoppgrenzen der betroffenen Tests erreicht. Man ersetzt die Grenzen $a_j(n)$ bzw. $b_j(n)$ solange durch die anderer Teiltests, bis auch die ursprünglichen Stoppgrenzen die Verträglichkeitsbedingung erfüllen. Der Vorteil dieses Verfahrens besteht darin, daß für alle Beobachtungsstufen $n > n^*$ mit den ursprünglich gewählten Stoppgrenzen $b_j(n)$ und $a_j(n)$, $1 \leq j \leq h - 1$ weitergetestet werden kann. Diese garantieren für $\theta = \theta_j$, $j = 1, \dots, h$ einen entsprechend der geforderten Werte für α_j und β_j minimalen mittleren Stichprobenumfang.

Es sei mit α ein obere Schranke für die Fehlerwahrscheinlichkeiten $\alpha^{(j)}$ des SWT gegeben. Die Stoppgrenzen der Einzeltests werden nun mit Hilfe der Waldschen Näherung bestimmt. Dabei sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Forderung

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \beta_{h-1} = \alpha \\ \alpha_j &= \frac{\alpha}{2}, \quad j = 2, \dots, h-1 \\ \beta_j &= \frac{\alpha}{2}, \quad j = 1, \dots, h-2 \end{aligned}$$

erfüllt. Der so konstruierte Test ist, wenn die Verträglichkeitsbedingung eingehalten wird, zulässig und besitzt unter der Menge der zulässigen Tests einen vergleichsweise geringen mittleren Stichprobenumfang. Die Einhaltung der Verträglichkeitsbedingung kann jedoch bei dieser Wahl der Stoppgrenzen nicht garantiert werden. Damit ist dieser Test möglicherweise nicht als SWT durchführbar.

Um die Einhaltung der Verträglichkeitsbedingung nachträglich zu erzwingen, macht sich eine Verschiebung der Stoppgrenzen der betroffenen Einzeltests erforderlich. Dabei ist zu beachten, daß schmalere Fortsetzungsbereiche bei SLQT in der Regel zu höheren Fehlerwahrscheinlichkeiten führen, während die Fehlerwahrscheinlichkeiten durch breitere Fortsetzungsbereiche gesenkt werden. Folglich wird die Zulässigkeit des SWT durch schmalere Fortsetzungsbereiche der Einzeltests gefährdet und die Einhaltung der Verträglichkeitsbedingung kann nur durch breitere Fortsetzungsbereiche bei den betroffenen Einzeltests erzwungen werden.

Im weiteren erfolgt zunächst eine Betrachtung der Eigenschaften der Stoppgrenzen der SLQT S_1, \dots, S_{h-1} . Wie im vorigen Abschnitt gezeigt, hängen die Stoppgrenzen $b_j(n)$ und $a_j(n)$, $n \geq 0$, $j = 1, \dots, h - 1$, der SLQT sowohl von den Fehlerwahrscheinlichkeiten α_j und β_j , als auch von der vorliegenden Wahrscheinlichkeitsfunktion sowie von den Werten für θ_j und θ_{j+1} ab. Aufgrund der Voraussetzung $\theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_h$ gilt jedoch immer

$$g_j := \frac{\gamma_{0j}}{\gamma_{1j}} < \frac{\gamma_{0j+1}}{\gamma_{1j+1}} =: g_{j+1} \quad j = 1, \dots, h-2. \quad (8)$$

Damit existiert selbst, wenn durch beliebige $a_{j+1}(0) < a_j(0)$ oder $b_{j+1}(0) < b_j(0)$ die Verträglichkeitsbedingung verletzt ist, stets eine Beobachtungsstufe n^* , $n^* \geq 0$, ab der erstmals alle Grenzen der SLQT S_j , $j = 1, \dots, h - 1$, die Relationen

$$b_j(n) \leq b_{j+1}(n) \quad \text{bzw.} \quad a_j(n) \leq a_{j+1}(n) \quad \forall j, n \geq n^*$$

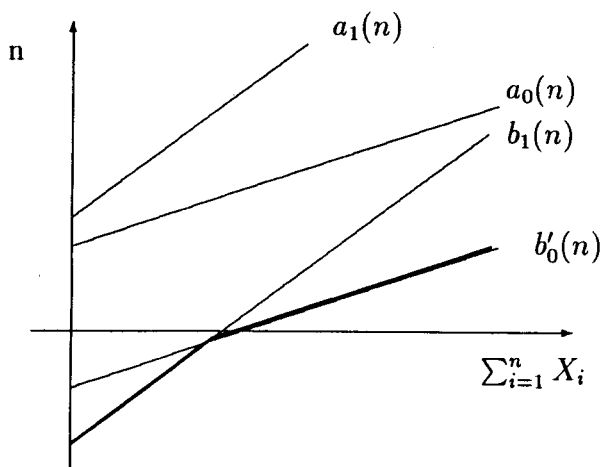


Abbildung 1: Beispiel zur Modifikation der Grenze $b_1(n)$ zu $b'_1(n)$

einhalten. Damit erfüllen die SLQT S_j offensichtlich für alle Beobachtungsstufen $n \geq n^*$ die Verträglichkeitsbedingung und es ergibt sich die Möglichkeit, ab dieser Stufe die ursprünglichen Stoppgrenzen $b_j(n)$ und $a_j(n)$, $j = 1, \dots, h - 1$ zu nutzen. Während der ersten $n < n^*$ Beobachtungsstufen ist dagegen eine Modifikation der Stoppgrenzen notwendig, da ein entsprechender SWT wegen der Verletzung der Verträglichkeitsbedingung sonst nicht definiert ist.

Anstelle der ursprünglichen Grenzen werden deshalb modifizierte Grenzen

$$b'_j(n) \quad \text{und} \quad a'_j(n), \quad j = 1, \dots, h - 1$$

eingeführt. Dabei sind drei grundlegenden Forderungen an die Stoppgrenzen zu beachten, um die Zulässigkeit des SWT und gleichzeitig ein effizientes Testverfahren mit geringem mittleren Stichprobenumfang zu gewährleisten.

1. Die Verträglichkeitsbedingung muß erfüllt sein.
2. Die Fortsetzungsbereiche der einzelnen Tests sollen möglichst schmal bleiben.
3. Die Forderungen bezüglich der Wahrscheinlichkeiten $\alpha^{(j)}$ sollen eingehalten werden.

Die Einhaltung von Forderung 3 bedeutet für die modifizierten Grenzen der Tests S_j , $j = 1, \dots, h - 1$:

$$\begin{aligned} b'_j(n) &\leq b_j(n) & \text{und} & & a'_j(n) &\geq a_j(n), & \forall n < n^* & \text{ sowie} & & (9) \\ b'_j(n) &\equiv b_j(n) & \text{und} & & a'_j(n) &\equiv a_j(n), & \forall n \geq n^* & & & \end{aligned}$$

Das wird erreicht, wenn man auf jeder Stufe $n < n^*$ für die modifizierte untere Grenze $b'_j(n)$ des SLQT S_j , $j = 1, \dots, h - 1$ den Wert der ursprünglichen Stoppgrenze $b_j(n)$ durch den

betragsmäßig kleinsten Wert der unteren Grenzen von einem der Teiltests S_l mit $l \geq j$ auf der Stufe n ersetzt, d.h.

$$b'_j(n) = \min(b_{j+l}(n) : b_{j+l}(n) \leq b_j(n), l = 1, \dots, h - 1 - j) . \quad (10)$$

Analog wird für die modifizierte obere Stoppgrenze $a'_j(n)$ die ursprüngliche Grenze $a_j(n)$ durch den betragsmäßig größten Wert einer oberen Grenze der Teiltests S_i mit $i \leq j$ auf Stufe n ersetzt, d.h.

$$a'_j(n) = \max(a_{j-i}(n) : a_{j-i}(n) \geq a_j(n), i = 0, \dots, j) . \quad (11)$$

Es bezeichne S'_j , $j = 1, \dots, h - 1$ einen modifizierten SLQT mit den Stoppgrenzen $b'_j(n)$ und $a'_j(n)$ entsprechend (10) und (11).

Werden diese modifizierten SLQT S'_j zu einem SWT zusammengefügt, so ist mit (10) und (11) die Einhaltung der Verträglichkeitsbedingung garantiert. Es bezeichne S' einen auf diese Art modifizierten SWT.

Satz 2 *In einem modifizierten Sobel-Wald-Test, der anstelle der ursprünglichen Stoppgrenzen $b_j(n)$, $a_j(n)$ durch die entsprechend (10) und (11) veränderten Stoppgrenzen $b'_j(n)$, $a'_j(n)$, $j = 1, \dots, h - 1$ bestimmt ist, ist die Verträglichkeitsbedingung auf allen Beobachtungsstufen erfüllt und es gilt*

$$a'_j(n) \leq a'_{j+1}(n) \quad \text{und} \quad b'_j(n) \leq b'_{j+1}(n), \quad \forall n, j.$$

Beweis: Der Beweis erfolgt indirekt.

Dafür wird ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen, daß für ein beliebiges j gelte:

$$b'_j(n) > b'_{j+l}(n), \quad l > 0 \quad (12)$$

Entsprechend (10) muß eine Grenze $b_i(n)$, $i \geq j+l$ existieren, mit $b_i(n) = b'_{j+l}(n)$. Weiterhin ist

$$b'_j(n) = \min(b_{j+i}(n) : b_{j+i}(n) \leq b_j(n), i = 0, \dots, h - 2 - j)$$

und folglich $b_i(n) = b'_{j+l}(n) \geq b'_j(n)$. Diese Aussage bildet einen Widerspruch zu Annahme (12) und es gilt die Aussage des Satzes. □

Die beschriebene Vorgehensweise kommt offensichtlich einer gleichzeitigen Erfüllung aller drei Forderungen wesentlich näher als die beiden bisher genutzten Varianten. Die Auswirkungen der Modifikation auf die Eigenschaften der Tests S'_j und damit auf die des modifizierten SWT S' werden im nachfolgenden Abschnitt diskutiert.

Für die Bestimmung der erforderlichen Stoppgrenzen $a_j(0)$ und $b_j(0)$ ist es möglich, die Waldsche Näherung zu nutzen, nach der die Grenzen A_j und B_j aus den Fehlerwahrscheinlichkeiten α_j und β_j als

$$B_j \approx \frac{\beta_j}{1 - \alpha_j}, \quad A_j \approx \frac{1 - \beta_j}{\alpha_j}$$

bestimmbar sind. Falls die OC-Funktionen $q_j(\theta)$ der einzelnen SLQT S_j exakt berechenbar sind, ist es vorteilhaft, zunächst beliebige Werte für die Grenzen $a_j(0)$ und $b_j(0)$ vorzugeben und anschließend so lange zu variieren, bis die daraus berechneten OC-Funktionen innerhalb eines beliebig vorgegebenen Intervalls

$$\begin{aligned} 1 - \alpha_j &\leq q_j(\theta_j) \leq 1 - \alpha_j + \epsilon && \text{sowie} \\ \beta_j - \epsilon &\leq q_j(\theta_{j+1}) \leq \beta_j && \epsilon > 0 \end{aligned}$$

liegen. Die Betrachtung der Trenngüte nach der Modifikation der Stoppgrenzen kann in diesem Fall ebenfalls durch eine exakte Berechnung der OC-Funktion erfolgen. Mit dieser Verfahrensweise ist die Breite der Fortsetzungsbereiche M_j , $a_j(n) - b_j(n)$, und damit der mittlere Stichprobenumfang im allgemeinen geringer als bei Nutzung der übergenauen Tests liefernden Waldschen Näherung.

MALY zeigt in [8], daß für den Spezialfall eines SWT über den Parameter einer $(1, \theta)$ -Binomialverteilung eine Verletzung der Verträglichkeitsbedingung nicht zu widersprüchlichen Testaussagen führt, da wegen der Gestalt der Testgröße in diesem Fall Entscheidungen erst auf Beobachtungsstufen $n \geq n^*$ möglich sind. Eine Modifikation der Stoppgrenzen der einzelnen SLQT ist damit in diesem Fall nicht erforderlich.

4 Der Einfluß der Modifikation auf die Testeigenschaften

Zunächst wird der Einfluß der modifizierten Testgrenzen der Einzeltests auf die Wahrscheinlichkeiten für Fehler erster bzw. zweiter Art für die modifizierten SLQT S'_j , $j = 1, \dots, h - 1$ untersucht. Danach werden die gewonnenen Erkenntnisse auf den modifizierten SWT S' übertragen.

Da der Zusammenhang zwischen der OC-Funktion $q_j(\theta)$ in einem SLQT und den Stoppgrenzen im allgemeinen nicht explizit bekannt ist, dient die Waldsche Näherung im weiteren als Grundlage der Untersuchungen. Sie ist jedoch wegen der Form der modifizierten SLQT S'_j für die Abschätzung der dort auftretenden Fehlerwahrscheinlichkeiten nicht direkt nutzbar. Deshalb wird zu jedem modifizierten SLQT S'_j eine Folge von SLQT $S_j^{(n)}$, $n = 0, \dots, n^*$ eingeführt, deren Fortsetzungsbereiche durch die Grenzen $b_j^{(n)} + ng_j$ und $a_j^{(n)} + ng_j$ eingeschlossen werden. Damit stimmen deren Stoppgrenzen $b_j^{(n)} + ng_j$ und $a_j^{(n)} + ng_j$ auf der Beobachtungsstufe n mit denen von S'_j überein, d.h. es gilt

$$b'_j(n) = b_j^{(n)} + ng_j \quad \text{und} \quad a'_j(n) = a_j^{(n)} + ng_j, \quad n = 0, \dots, n^* .$$

Die Werte für $b_j^{(n)}$ und $a_j^{(n)}$ ergeben sich dann für alle Beobachtungsstufen aus den folgenden Überlegungen. Die untere Stoppgrenze des Tests S'_j , $b'_j(n) = b_{j+i}(n)$, $i \geq 0$ verläuft auf der Beobachtungsstufe n durch den Punkt $y \in \mathbf{R}$. Dabei wird angenommen, daß eine Gerade $G_j(n)$ mit dem zum SLQT S_j gehörenden Anstieg g_j durch den Punkt (n, y) verläuft. Der Schnittpunkt der gedachten Geraden mit der Ordinatenachse ist dann $b_j^{(n)}$. Analog ergibt sich aus der oberen Grenze von S'_j , $a'_j(n) = a_{j-l}(n)$, $l \geq 0$ der gedachte Schnittpunkt mit der Ordinatenachse $a_j^{(n)}$. Da $g_j < g_{j+i}$ und $b_{j+i}(n) \leq b_j(n)$ ist, gilt

$$b_{j+i}(0) \leq b_j^{(n)} \leq b_j(0), \quad i \geq 0, \quad n \geq 0 \quad \text{und} \quad (13)$$

$$a_{j-l}(0) \geq a_j^{(n)} \geq a_j(0), \quad l \geq 0. \quad (14)$$

Weiterhin folgt aus (13) und (14) für alle Tests $S_j^{(n)}$:

$$a_j^{(0)}(n) - b_j^{(0)}(n) \geq a_j^{(m)}(n) - b_j^{(m)}(n) \geq a_j(n) - b_j(n), \quad m, n < n^* \quad (15)$$

Zu den so konstruierten Tests $S_j^{(n)}$ lassen sich nun mit Hilfe der Waldschen Näherung die Wahrscheinlichkeiten für Fehler erster und zweiter Art bestimmen. Diese seien $\alpha_j^{(n)}$ bzw. $\beta_j^{(n)}$. Es gilt:

$$\alpha_j^{(n)} \approx \frac{1 - B_j^{(n)}}{A_j^{(n)} - B_j^{(n)}}, \quad \beta_j^{(n)} \approx \frac{B_j^{(n)}(A_j^{(n)} - 1)}{A_j^{(n)} - B_j^{(n)}} \quad (16)$$

Dabei bezeichnen $B_j^{(n)}$ und $A_j^{(n)}$ die Stopp Grenzen, die sich bei der Transformation des SLQT $S_j^{(n)}$ in einen SLQT mit dem Likelihoodquotienten als Testgröße ergeben. Es gilt:

$$B_j^{(n)} := \exp(b_j^{(n)} \gamma_{1j}) \quad \text{sowie} \quad (17)$$

$$A_j^{(n)} := \exp(a_j^{(n)} \gamma_{1j}) \quad (18)$$

Für diese ist analog zu (13) und (14):

$$B_j^{(n-1)} \leq B_j^{(n)} \leq B_j^{(n^*)} =: B_j \quad \forall n < n^* \quad (19)$$

$$A_j^{(n-1)} \geq A_j^{(n)} \geq A_j^{(n^*)} =: A_j \quad \forall n < n^* \quad (20)$$

Zwischen den modifizierten Grenzen $B_j^{(n)}$, $A_j^{(n)}$ und den Wahrscheinlichkeiten $\alpha_j^{(n)}$, $\beta_j^{(n)}$ gelten die folgenden Relationen:

$$B_j^{(n)} \geq \frac{\beta_j^{(n)}}{1 - \alpha_j^{(n)}} \quad \text{und} \quad A_j^{(n)} \leq \frac{1 - \beta_j^{(n)}}{\alpha_j^{(n)}}, \quad \forall n < n^*$$

Daraus folgt unter der Annahme, daß die Stopp Grenzen B_j und A_j entsprechend der vorgegebenen Fehlerwahrscheinlichkeiten α_j und β_j als

$$B_j = \frac{\beta_j}{1 - \alpha_j} \quad \text{und} \quad A_j = \frac{1 - \beta_j}{\alpha_j}$$

gewählt sind mit (19) und (20)

$$\frac{\beta_j^{(n)}}{1 - \alpha_j^{(n)}} \leq \frac{\beta_j}{1 - \alpha_j} \quad \text{und} \quad \frac{1 - \beta_j^{(n)}}{\alpha_j^{(n)}} \geq \frac{1 - \beta_j}{\alpha_j}.$$

Folglich ist für alle Beobachtungsstufen n die Relation

$$\beta_j^{(n)} + \alpha_j^{(n)} \leq \beta_j + \alpha_j, \quad j = 1, \dots, h - 1$$

erfüllt und die im vorigen Abschnitt beschriebene Art der Modifikation der Stopp Grenzen beeinflusst die Testgüte der SLQT in diesem Sinne nicht negativ.

Für die Fehlerwahrscheinlichkeiten $\alpha^{(j)}$, $j = 1, \dots, h$ im modifizierten SWT S' ist jedoch die Summe $\alpha_j + \beta_{j-1}$ maßgeblich. Um diese abschätzen zu können, werden im folgenden die zu den Tests $S_j^{(n)}$ gehörigen Werte $\alpha_j^{(n)}$ und $\beta_j^{(n)}$, $n = 0, \dots, n^*$ genauer untersucht.

Die Fehlerwahrscheinlichkeiten sollen der besseren Übersichtlichkeit wegen in Abhängigkeit von den ursprünglich vorgegebenen Stoppgrenzen B_j und A_j sowie von den Wahrscheinlichkeiten α_j und β_j angegeben werden. Dazu sei

$$\epsilon_j(n) := \frac{B_j - B_j^{(n)}}{(A_j - B_j)} \quad \text{und} \quad \eta_j(n) := \frac{A_j^{(n)} - A_j}{(A_j - B_j)}.$$

Damit ergeben sich die modifizierten Grenzen als

$$B_j^{(n)} = B_j - \epsilon_j(n)(A_j - B_j) \quad \text{und} \quad A_j^{(n)} = \eta_j(n)(A_j - B_j) + A_j.$$

Entsprechend (16) können nun die Wahrscheinlichkeiten $\alpha_j^{(n)}$ und $\beta_j^{(n)}$, $j = 1, \dots, h-1$, $n \geq 0$ bestimmt werden. Man erhält:

$$\begin{aligned} \alpha_j^{(n)} &= \frac{1 - B_j + \epsilon_j(n)(A_j - B_j)}{(\eta_j(n) + \epsilon_j(n) + 1)(A_j - B_j)} \\ &= \frac{\alpha_j}{(\eta_j(n) + \epsilon_j(n) + 1)} + \frac{\epsilon_j(n)}{(\eta_j(n) + \epsilon_j(n) + 1)} \quad \text{sowie} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \beta_j^{(n)} &= \frac{(B_j - \epsilon_j(n)(A_j - B_j))(\eta_j(n)(A_j - B_j) + A_j - 1)}{(\eta_j(n) + \epsilon_j(n) + 1)(A_j - B_j)} \\ &= \frac{\beta_j}{(\eta_j(n) + \epsilon_j(n) + 1)} + \frac{B_j \eta_j(n) - \epsilon_j(n)((A_j - 1) + \eta_j(n)(A_j - B_j))}{(\eta_j(n) + \epsilon_j(n) + 1)} \end{aligned} \quad (22)$$

Die Formeln (21) und (22) zeigen, daß eindeutige Relationen zwischen den Wahrscheinlichkeiten $\alpha_j^{(0)}$ bis $\alpha_j^{(n^*)}$ beziehungsweise $\beta_j^{(0)}$ bis $\beta_j^{(n^*)}$, $j = 1, \dots, h-1$ nur dann bestehen, wenn einer der beiden Werte $\epsilon_j(n)$, $\eta_j(n)$ für alle Beobachtungsstufen den Wert Null annimmt. Dieser Fall tritt ein, falls entweder $B_j^{(n)} \equiv B_j$ oder $A_j^{(n)} \equiv A_j$, $\forall n$ gilt. Man erhält für $B_j^{(n)} \equiv B_j$

$$\alpha_j^{(0)} \leq \alpha_j^{(1)} \leq \dots \leq \alpha_j^{(n^*)} = \alpha_j \quad \text{und} \quad (23)$$

$$\beta_j^{(0)} \geq \beta_j^{(1)} \geq \dots \geq \beta_j^{(n^*)} = \beta_j \quad (24)$$

sowie für $A_j^{(n)} \equiv A_j$:

$$\alpha_j^{(0)} \geq \alpha_j^{(1)} \geq \dots \geq \alpha_j^{(n^*)} = \alpha_j \quad \text{und} \quad (25)$$

$$\beta_j^{(0)} \leq \beta_j^{(1)} \leq \dots \leq \beta_j^{(n^*)} = \beta_j. \quad (26)$$

Werden durch die Modifikation beide Stoppgrenzen eines SLQT verändert, so ist für die Abschätzung der Fehlerwahrscheinlichkeiten $\alpha^{(j)}$ zum modifizierten SWT eine Bestimmung der einzelnen Fehlerwahrscheinlichkeiten $\alpha_j^{(n)}$ und $\beta_j^{(n)}$ entsprechend (16) für alle Beobachtungsstufen n , $n = 0, \dots, n^*$ erforderlich.

Aus (24) und (25) folgt, daß in den modifizierten Einzeltests besonders Veränderungen nur einer Stoppgrenze, beispielsweise $A_j^{(n)} > A_j$ und $B_j^{(n)} = B_j$, für $n \leq n^*$ in einigen

Fällen dazu führen können, daß die Fehlerwahrscheinlichkeiten $\alpha^{(j)} = \alpha_j + \beta_{j-1}$ den maximal zulässigen Wert α überschreiten. In diesem Fall sollten die betroffenen SLQT so neu konzipiert werden, daß die nach (16) kalkulierbaren Schwankungen der Fehlerwahrscheinlichkeiten noch innerhalb eines vorgegebenen Toleranzbereiches liegen.

Der mittlere Stichprobenumfang eines SLQT, der die Hypothesen $H_j : \theta = \theta_j$ und $H_{j+1} : \theta = \theta_{j+1}$ gegeneinander testet, wird maximal, wenn der tatsächliche Wert von θ im Intervall (θ_j, θ_{j+1}) liegt. Damit erfordert von den zum SWT zusammengefaßten Einzeltests im allgemeinen derjenige Test S_j den höchsten mittleren Stichprobenumfang, in dessen Parameterintervall (θ_j, θ_{j+1}) der wahre Parameter θ enthalten ist. Da der mittlere Stichprobenumfang eines SWT durch

$$\max_j E_\theta N_j \leq E_\theta N \leq \sum_{j=1}^{h-1} E_\theta N_j$$

beschränkt ist, wirkt sich der im Vergleich zu den bisher genutzten Konstruktionsmöglichkeiten schmalere Fortsetzungsbereich eines modifizierten SLQT S'_j besonders dann günstig auf den Stichprobenumfang im modifizierten SWT aus, wenn $\theta_j < \theta < \theta_{j+1}$ gilt, während dieser Einfluß für $\theta \ll \theta_j$ bzw. $\theta \gg \theta_{j+1}$ kaum spürbar ist.

5 Beispiel

Hier erfolgt der Vergleich von Testeigenschaften eines entsprechend dem in der vorliegenden Arbeit beschriebenen Verfahren konstruierten und modifizierten SWT mit denen eines SWT in der ursprünglichen Form. Dafür wird zunächst ein Test zur Entscheidung zwischen 5 Hypothesen $H_1 : \theta = 0.1$, $H_2 : \theta = 0.3$, $H_3 : \theta = 0.5$, $H_4 : \theta = 0.7$ und $H_5 : \theta = 0.9$ über den Parameter θ einer 0-1-verteilten Zufallsgröße X betrachtet. Für die Fehlerwahrscheinlichkeiten gelte:

$$0,05 \geq \alpha^{(j)} = \begin{cases} \alpha_1 & j=1 \\ \alpha_j + \beta_{j-1} & 1 < j \leq 4 \\ \beta_4 & j=5 \end{cases}$$

Dafür sei $\alpha_1 = \beta_4 = 0.05$, $\alpha_j = 0.025$, $j = 2, 3, 4$ und $\beta_j = 0.025$, $j = 1, 2, 3$. Mit Hilfe der Waldschen Näherung ergibt sich für die Stoppgrenzen:

$A_1 = 19.5$	$B_1 = 0.026$	$\gamma_{11} = 1.35$	$a_1(0) = 2.2$	$b_1(0) = -2.7$
$A_2 = 39.0$	$B_2 = 0.026$	$\gamma_{12} = 0.85$	$a_2(0) = 4.3$	$b_2(0) = -4.3$
$A_3 = 39.0$	$B_3 = 0.026$	$\gamma_{13} = 0.85$	$a_3(0) = 4.3$	$b_3(0) = -4.3$
$A_4 = 38.0$	$B_4 = 0.051$	$\gamma_{14} = 1.35$	$a_4(0) = 2.7$	$b_4(0) = -2.2$

Zur Entscheidung zwischen den Hypothesen H_1, \dots, H_5 müssen also die folgenden Tests parallel betrachtet werden:

$S_1 :$	$a_1(n) = 2.2 + 0.2n,$	$b_1(n) = -2.7 + 0.2n,$
$S_2 :$	$a_2(n) = 4.3 + 0.4n,$	$b_2(n) = -4.3 + 0.4n,$
$S_3 :$	$a_3(n) = 4.3 + 0.6n,$	$b_3(n) = -4.3 + 0.6n,$
$S_4 :$	$a_4(n) = 2.7 + 0.8n,$	$b_4(n) = -2.2 + 0.8n$

Die Tests S_1, \dots, S_4 erfüllen die Verträglichkeitsbedingung offensichtlich nicht. Im folgenden werden die beiden vorgestellten Formen des SWT bezüglich der Wahrscheinlichkeiten für Fehler erster Art sowie des mittleren Stichprobenumfanges miteinander verglichen.

Variante 1: Man wählt, um die Verträglichkeitsbedingung zu erfüllen, die Stoppgrenzen

$$\begin{aligned} a'_1(n) &= a_1(n), & b'_1(n) &= b_2(n) + 0.2n \\ a'_2(n) &= a_2(n), & b'_2(n) &= b_2(n) \\ a'_3(n) &= a_3(n), & b'_3(n) &= b_3(n) \\ a'_4(n) &= a_3(0) + 0.8n, & b'_4(n) &= b_4(n). \end{aligned}$$

Dadurch verringern sich die Fehlerwahrscheinlichkeiten zu den Tests S'_1 und S'_4 , α'_1, β'_1 und α'_4, β'_4 weit unter das geforderte Höchstmaß, die Güte des Sobel-Wald-Tests insgesamt erhöht sich jedoch nicht, da die maximale Fehlerwahrscheinlichkeit $\alpha^{(3)}$ von dieser Maßnahme unberührt bleibt. Die im Vergleich mit S_1 beziehungsweise S_4 breiteren Fortsetzungsbereiche von S'_1 und S'_4 führen zu einer Erhöhung des mittleren Stichprobenumfanges, besonders wenn der Parameter θ Werte um $\theta \approx 0.2$ oder $\theta \approx 0.8$ annimmt. Die genauen Charakteristiken dieses SWT können in den nachfolgenden Tabellen abgelesen werden.

Theta	$Q^{(1)}(\theta)$	$Q^{(2)}(\theta)$	$Q^{(3)}(\theta)$	$Q^{(4)}(\theta)$	$Q^{(5)}(\theta)$
0.00	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.10	0.999	0.001	0.000	0.000	0.000
0.20	0.511	0.489	0.000	0.000	0.000
0.30	0.007	0.975	0.019	0.000	0.000
0.40	0.000	0.504	0.496	0.001	0.000
0.50	0.000	0.024	0.951	0.024	0.000
0.60	0.000	0.001	0.496	0.504	0.000
0.70	0.000	0.000	0.019	0.975	0.007
0.80	0.000	0.000	0.000	0.489	0.511
0.90	0.000	0.000	0.000	0.001	0.999
1.00	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000

Theta	$E_\theta N$	$E_\theta N^{(1)}$	$E_\theta N^{(2)}$	$E_\theta N^{(3)}$	$E_\theta N^{(4)}$
0.00	22.0000	22.0000	11.0000	8.0000	6.0000
0.10	43.9225	43.9131	14.9406	9.2477	6.7091
0.20	128.1067	126.6216	22.4388	11.4664	7.7627
0.30	64.6574	45.6227	43.1922	15.2547	9.3088
0.40	90.3104	23.1810	85.0867	22.8189	11.6358
0.50	64.1722	15.4941	43.3898	43.3898	15.4941
0.60	90.3104	11.6358	22.8189	85.0867	23.1810
0.70	64.6574	9.3088	15.2547	43.1922	45.6227
0.80	128.1067	7.7627	11.4664	22.4388	126.6216
0.90	43.9225	6.7091	9.2477	14.9406	43.9131
1.00	22.0000	6.0000	8.00	11.0000	22.0000

Variante 2: Es erfolgt eine Modifikation der Grenzen der Tests S_1 und S_4 , indem $b_1(n)$ durch $b_2(n)$ und $a_4(n)$ durch $a_3(n)$ ersetzt werden, solange $b_2(n) < b_1(n)$ beziehungsweise $a_4(n) < a_3$ gilt. Man erhält die veränderten Grenzen als

$$b'_1(n) = \begin{cases} 0.4n - 4.3 & n \leq 8 \\ 0.2n - 2.7 & n > 8 \end{cases} \quad (27)$$

$$a'_4(n) = \begin{cases} 0.6n + 4.3 & n \leq 8 \\ 0.8n + 2.7 & n > 8 \end{cases} \quad (28)$$

Aus (27) und (28) ist ersichtlich, daß diese Testform es erlaubt, ab der 9. Beobachtungsstufe mit den ursprünglichen Grenzen zu arbeiten und damit den durch das schmalere Testgebiet geringeren mittleren Stichprobenumfang auszunutzen.

Die Werte für α_j und β_j , $j = 1, 4$ verändern sich entsprechend (21) und (22) im vorhergehenden Abschnitt zu $\alpha_j^{(n)}$ und $\beta_j^{(n)}$. Die Größen α_2 , α_3 sowie β_2 , β_3 bleiben unverändert. Wegen $\alpha_2 + \beta_1^{(n)} \leq \alpha_2 + \beta_1 \leq 0,05$ und $\alpha_4^{(n)} + \beta_3 \leq \alpha_4 + \beta_3 \leq 0,05$ können dort keine Probleme auftreten, während für $\alpha_1^{(0)}$ und $\beta_4^{(0)}$ eine zusätzliche Überprüfung erforderlich ist.

Wegen der Modifikation der unteren Stoppgrenze ergeben sich für $j = 1$ die folgenden Relationen für die Fehlerwahrscheinlichkeiten:

$$\begin{aligned} \beta_1^{(0)} &\leq \beta_1^{(1)} \leq \dots \leq \beta_1^{(8)} = \beta_1 \approx 0.025 \\ \alpha_1^{(0)} &\geq \alpha_1^{(1)} \geq \dots \geq \alpha_1^{(8)} = \alpha_1 \approx 0.05 \end{aligned}$$

Daraus folgt, daß für die Abschätzung der Fehlerwahrscheinlichkeiten $\alpha^{(1)}$ die Bestimmung von $\alpha_1^{(0)}$ ausreichend ist. Man erhält

$$\begin{aligned} \alpha_1^{(0)} &\approx \frac{1 - B_1^{(0)}}{A_1 - B_1^{(0)}} = 0.051 \quad \text{wobei} \\ B_1^{(0)} &= \exp(b_2(0)\gamma_{20}) = 0.003 \quad \text{ist.} \end{aligned}$$

Wegen der Modifikation der oberen Stoppgrenze ergeben sich für $j = 4$ die folgenden Relationen für die Fehlerwahrscheinlichkeiten:

$$\begin{aligned} \beta_4^{(0)} &\geq \beta_4^{(1)} \geq \dots \geq \beta_4^{(8)} = \beta_4 \approx 0.05 \\ \alpha_4^{(0)} &\leq \alpha_4^{(1)} \leq \dots \leq \alpha_4^{(8)} = \alpha_4 \approx 0.025 \end{aligned}$$

Daraus folgt, daß für die Abschätzung der Fehlerwahrscheinlichkeiten $\alpha^{(4)}$ die Bestimmung von $\beta_4^{(0)}$ ausreichend ist. Man erhält

$$\begin{aligned} \beta_4^{(0)} &\approx \frac{B_4(A_4^{(0)} - 1)}{A_4^{(0)} - B_4} = 0.051 \quad \text{wobei} \\ A_4^{(0)} &= \exp(a_3(0)\gamma_{40}) = 332 \quad \text{ist.} \end{aligned}$$

Damit erhält man die Werte für $\alpha(j)$, $j = 1, \dots, 5$

$$\begin{aligned} \alpha(1) &\approx 0,051, \\ \alpha(2) &\approx 0,05, \\ \alpha(3) &\approx 0,05, \\ \alpha(4) &\approx 0,05, \\ \alpha(5) &\approx 0,051. \end{aligned}$$

Es kann also davon ausgegangen werden, daß der entsprechend dem beschriebenen Verfahren modifizierte SWT die Anforderungen an die Fehlerwahrscheinlichkeiten erfüllt und zulässig ist.

Der mittlere Stichprobenumfang in diesem Test ist besonders, wenn der zu schätzende Parameter θ Werte in den Bereichen $0 \leq \theta \leq \theta_1 = 0.3$ und $\theta_3 = 0.7 \leq \theta \leq 1$ annimmt, wesentlich kleiner als bei dem in Variante 1 aufgeführten Test, ohne daß dafür Einschränkungen bei der Testgüte eintreten.

Die genauen Charakteristiken dieses modifizierten SWT sind in den nachfolgenden Tabellen ablesbar.

Theta	$Q^{(1)}(\theta)$	$Q^{(2)}(\theta)$	$Q^{(3)}(\theta)$	$Q^{(4)}(\theta)$	$Q^{(5)}(\theta)$
0.00	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.10	0.973	0.027	0.000	0.000	0.000
0.20	0.461	0.538	0.000	0.000	0.000
0.30	0.038	0.943	0.019	0.000	0.000
0.40	0.002	0.502	0.496	0.001	0.000
0.50	0.000	0.024	0.951	0.024	0.000
0.60	0.000	0.001	0.496	0.502	0.002
0.70	0.000	0.000	0.019	0.943	0.038
0.80	0.000	0.000	0.000	0.538	0.461
0.90	0.000	0.000	0.000	0.027	0.973
1.00	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000

Theta	$E_{\theta}N$	$E_{\theta}N^{(1)}$	$E_{\theta}N^{(2)}$	$E_{\theta}N^{(3)}$	$E_{\theta}N^{(4)}$
0.00	14.0000	14.0000	11.0000	8.0000	3.0000
0.10	26.9452	26.6232	14.9406	9.2477	3.3915
0.20	47.5491	42.1034	22.4388	11.4664	3.9797
0.30	50.4119	22.1819	43.1922	15.2547	4.8202
0.40	88.6818	12.0879	85.0867	22.8189	6.0650
0.50	63.9639	8.1046	43.3898	43.3898	8.1046
0.60	88.6818	6.0650	22.8189	85.0867	12.0879
0.70	50.4119	4.8202	15.2547	43.1922	22.1819
0.80	47.5491	3.9797	11.4664	22.4388	42.1034
0.90	26.9452	3.3915	9.2477	14.9406	26.6232
1.00	14.0000	3.0000	8.00	11.0000	14.0000

An dieser Stelle werden die Vorteile des modifizierten SWT gegenüber SWT in der ursprünglichen Form anhand eines weiteren Beispiels dargestellt. Es wird ein Test zur Entscheidung zwischen 4 Hypothesen $H_1 : \theta = 0.2$, $H_2 : \theta = 0.3$, $H_3 : \theta = 0.4$, $H_4 : \theta = 0.5$ wiederum über den Parameter θ einer 0-1-verteilten Zufallsgröße X betrachtet. Für die Fehlerwahrscheinlichkeiten gelte:

$$0,05 \geq \alpha^{(j)} = \begin{cases} \alpha_1 & j=1 \\ \alpha_j + \beta_{j-1} & 1 < j \leq 3 \\ \beta_3 & j=4 \end{cases}$$

Dafür sei $\alpha_1 = \beta_3 = 0.05$, $\alpha_j = 0.025$, $j = 2, 3$ und $\beta_j = 0.025$, $j = 1, 2$. Mit Hilfe der Waldschen Näherung ergibt sich für die Stoppgrenzen:

$$\begin{array}{lllll} A_1 = 19.5 & B_1 = 0.026 & \gamma_{11} = 0.54 & a_1(0) = 5.5 & b_1(0) = -6.7 \\ A_2 = 39.0 & B_2 = 0.026 & \gamma_{12} = 0.44 & a_2(0) = 8.3 & b_2(0) = -8.3 \\ A_3 = 38.0 & B_3 = 0.051 & \gamma_{13} = 0.41 & a_3(0) = 8.9 & b_3(0) = -7.2 \end{array}$$

Zur Entscheidung zwischen den Hypothesen H_1, \dots, H_4 müssen also die folgenden Tests parallel betrachtet werden:

$$\begin{array}{ll} S_1 : & a_1(n) = 5.5 + 0.24n, \quad b_1(n) = -6.7 + 0.24n, \\ S_2 : & a_2(n) = 8.3 + 0.35n, \quad b_2(n) = -8.3 + 0.35n, \\ S_3 : & a_3(n) = 8.9 + 0.44n, \quad b_3(n) = -7.2 + 0.44n \end{array}$$

Die Tests S_1, \dots, S_3 erfüllen die Verträglichkeitsbedingung ebenfalls nicht. Um deren Einhaltung zu erzwingen, ergeben sich wiederum zwei Möglichkeiten. Bei Variante 1 wird die untere Stoppgrenze des SLQT S_1 durch die Grenze

$$b'_1(n) = b_3(0) + 0.24n = -8.9 + 0.24n$$

ersetzt. Die Charakteristiken des dadurch entstandenen SWT sind in den beiden nachfolgenden Tabellen enthalten.

Theta	$Q_\theta^{(1)}$	$Q_\theta^{(2)}$	$Q_\theta^{(3)}$	$Q_\theta^{(4)}$
0.00	1.000	0.000	0.000	0.000
0.05	1.000	0.000	0.000	0.000
0.10	1.000	0.000	0.000	0.000
0.15	0.998	0.002	0.000	0.000
0.20	0.931	0.069	0.000	0.000
0.25	0.238	0.762	0.000	0.000
0.30	0.005	0.974	0.021	0.000
0.35	0.000	0.503	0.496	0.001
0.40	0.000	0.026	0.929	0.046
0.45	0.000	0.001	0.389	0.610
0.50	0.000	0.000	0.028	0.972
0.55	0.000	0.000	0.001	0.999
0.60	0.000	0.000	0.000	1.000

Theta	EN_θ	$EN_\theta^{(1)}$	$EN_\theta^{(2)}$	$EN_\theta^{(3)}$
0.00	35.0000	35.0000	24.0000	17.0000
0.05	44.2080	44.2080	28.1990	18.9827
0.10	60.1267	60.1261	33.8754	21.7192
0.15	93.3359	93.2684	42.2613	25.4511
0.20	187.7762	185.8542	56.2972	30.7558
0.25	260.2279	241.0032	84.3608	38.8610
0.30	195.4558	95.5031	161.7543	52.7394
0.35	331.5255	52.8106	316.7241	81.8304
0.40	245.5353	36.3820	162.2147	165.5470
0.45	281.8581	27.7810	85.3798	269.7684
0.50	145.8942	22.4904	57.0422	144.7680
0.55	83.0202	18.8949	42.8151	82.9534
0.60	57.1952	16.2793	34.2737	57.1923

Bei Variante 2 erfolgt eine Modifikation der unteren Stoppgrenze des Tests S_1 , indem $b_1(n)$ durch $b_2(n)$ ersetzt wird, solange $b_2(n) < b_1(n)$ gilt. Man erhält

$$b'_1(n) = \begin{cases} -8.3 + 0.35n & n \leq 14 \\ -6.7 + 0.24n & n > 14 \end{cases} \quad (29)$$

Aus (29) ist ersichtlich, daß diese Testform es erlaubt, ab der 15. Beobachtungsstufe mit den ursprünglichen Grenzen zu arbeiten und damit den durch das schmalere Testgebiet geringeren mittleren Stichprobenumfang auszunutzen. Ein Vergleich der Charakteristiken der beiden nach den Varianten 1 und 2 konstruierten SWT zeigt, daß bei der in dieser Arbeit vorgestellten Variante 2 der mittlere Stichprobenumfang für alle $\theta \leq 0.3$ zum Teil wesentlich geringer ist als bei einem SWT entsprechend Variante 1. Eine Betrachtung der OC-Funktionen zeigt, daß die vorgeschlagene Modifikation die Testgüte nicht beeinträchtigt. Die Charakteristiken des modifizierten SWT sind in den beiden nachfolgenden Tabellen enthalten.

Theta	$Q_\theta^{(1)}$	$Q_\theta^{(2)}$	$Q_\theta^{(3)}$	$Q_\theta^{(4)}$
0.00	1.000	0.000	0.000	0.000
0.05	1.000	0.000	0.000	0.000
0.10	1.000	0.000	0.000	0.000
0.15	0.998	0.002	0.000	0.000
0.20	0.932	0.068	0.000	0.000
0.25	0.299	0.701	0.000	0.000
0.30	0.014	0.966	0.021	0.000
0.35	0.000	0.502	0.496	0.001
0.40	0.000	0.026	0.929	0.046
0.45	0.000	0.001	0.389	0.610
0.50	0.000	0.000	0.028	0.972
0.55	0.000	0.000	0.001	0.999
0.60	0.000	0.000	0.000	1.000

Theta	EN_{θ}	$EN_{\theta}^{(1)}$	$EN_{\theta}^{(2)}$	$EN_{\theta}^{(3)}$
0.00	28.0000	28.0000	24.0000	17.0000
0.05	35.9709	35.9709	28.1990	18.9827
0.10	48.7486	48.7480	33.8754	21.7192
0.15	75.5965	75.5291	42.2613	25.4511
0.20	151.0197	149.0978	56.2972	30.7558
0.25	221.9370	202.7123	84.3608	38.8610
0.30	193.7883	93.8356	161.7543	52.7394
0.35	331.4809	52.7660	316.7241	81.8304
0.40	245.5340	36.3807	162.2147	165.5470
0.45	281.8581	27.7810	85.3798	269.7684
0.50	145.8942	22.4904	57.0422	144.7680
0.55	83.0202	18.8949	42.8151	82.9534
0.60	57.1952	16.2793	34.2737	57.1923

Literatur

- [1] Eger, K.H. (1980): A direct method of the computation of the OC and of the moments of the sample number for SPRTs in the case of discrete random variables. *Math. Operationsf. und Statistik, Ser. Statistics*, 11, 499-514.
- [2] Eger, K.H. (1981): Eine direkte Methode zur Berechnung der Charakteristiken des Sobel-Wald-Tests zur Entscheidung zwischen k Hypothesen. *Wissenschaftliche Zeitschrift der TH Karl-Marx-Stadt*, (1981), Heft 4.
- [3] Eger, K.H. (1985): *Sequential tests*. Teubner-Texte zur Mathematik; Band 74, 151-155. Leipzig 1985.
- [4] Ghosh, B.K. (1970): *Sequential tests of statistical hypotheses*. Reading.
- [5] Ghosh, B.K. and Sen, P.K. (1991): *Handbook of sequential analysis*.
- [6] Govindarajulu, Z. (1975): *Sequential statistical procedures*. New York.
- [7] Kohlruss, D. (1994): Exact formulas for the OC and ASN function of the SPRT for Erlang distributions. *Sequential analysis*, 13(1), 53-62.
- [8] Maly, V. (1960): Sequenzprobleme mit mehreren Entscheidungen und Sequenzschätzung. *Biometrische Zeitschrift* (1960), 2, 45-64.
- [9] Meyer, K. (1994): Computing some characteristics of sequentially planned Sobel-Wald tests. Preprint der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster.
- [10] Oehlke, S. (1996): Die Berechnung der Charakteristiken für einen Sobel-Wald-Test. Preprint der TU Chemnitz/Zwickau.
- [11] Oehlke, S. (1996): Die Berechnung der Charakteristiken für den verallgemeinerten Sobel-Wald-Test. Preprint der TU Chemnitz/Zwickau.
- [12] Simons, G. (1967a): Lower bounds for average sample number of sequential multihypotheses tests. *Annals of mathematical statistics*, 38, 1343-1364.
- [13] Simons, G. (1967b): A sequential three hypotheses test for determining the mean of a normal population with known variance. *Annals of mathematical statistics*, 38, 1365-1375.
- [14] Simons, G. (1967c): A class of sequential procedures for choosing one k hypotheses concerning the unknown drift parameter of the Wiener process. *Annals of mathematical statistics*, 38, 1376-1383.
- [15] Sobel, M., Wald, A. (1949): A sequential decision procedure for choosing the unknown mean of a normal distribution. *Annals of mathematical statistics*, 20, 502-522.
- [16] Stadje, W. (1987): On the SPRT for the mean of an exponential distribution. *Statistics & Probability letters* 5, 389-395.
- [17] Wald, A. (1947): *Sequential analysis*. John Wiley, New York.
- [18] Wetherill, G.B. and Glazebrook, K.D. (1986): *Sequential methods in statistics*. Third edition. Chapman and Hall.