Themenvorschlag für ein Computerpraktikum bzw. eine Bachelorarbeit

Inversion der Radon-Transformation auf beliebigen Datenpunkten

Sei $f\colon \mathbb{B}^2 \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf der Einheitskreisscheibe $\mathbb{B}^2 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\boldsymbol{x}\| \le 1\}$. Die **Radon-Transformation** $\mathcal{R}$ berechnet die Integrale der Funktion f entlang aller Geraden. Wir schreiben eine Gerade mithilfe deren Normalenvektor $(\cos\phi, \sin\phi)$ und dem Abstand $s \in \mathbb{R}$ zum Ursprung als

$$\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1 \cos\varphi + x_2 \sin\varphi = s\}.$$

Wir definieren die Radon-Transformation

$$\begin{aligned} &\mathcal{R}\colon L^2(\mathbb{B}^2) \to L^2(\mathbb{S}^1 \times [-1,1], w_1^{-1}) \\ &\mathcal{R}f(\varphi, s) = \int_{x_1\cos\varphi + x_2\sin\varphi = s} f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \end{aligned} \tag{1}$$

mit der Gewichtsfunktion

$$w_\nu(s) = (1-s^2)^{\nu - 1/2}, \qquad s \in [-1,1].$$

Singulärwertzerlegung Wir definieren die Funktionen $V_{m,l}\colon \mathbb{B}^2 \to \mathbb{C}$ für $m \in \mathbb{N}_0$ und $l = -m, -m+2, \dots, m$ durch

$$V_{m,l}\begin{pmatrix} s\cos\varphi \\ s\sin\varphi \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{m+1}{\pi}}\, s^l P^{(0,l)}_{\frac{m-l}{2}}(2s^2-1)\,\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}l\varphi}, \qquad s \in [0,1],\ \varphi \in [0, 2\pi) \tag{2}$$

Dabei ist $P_n^{(\alpha,\beta)}$ das Jacobi-Polynom vom Grad n mit Parametern $\alpha, \beta > -1$. Die Funktionen $V_{m,l}$ sind auch als Disc-Polynome oder Zernike-Polynome bekannt und bilden eine Orthonormalbasis von $L^2(\mathbb{B}^2)$ bestehend aus Polynomen vom Grad $m \in \mathbb{N}_0$.
Auf $\mathbb{S}^1 \times [-1,1]$, dem Bildraum der Radon-Transformation, definieren wir für $m \in \mathbb{N}_0$ und $l = -m, -m+2, \dots, m$ die orthonormalen Funktionen

$$\Phi_{m,l}(\varphi, s) = \frac{1}{\pi}\sqrt{1-s^2}\,U_m(s)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}l\varphi}, \tag{3}$$

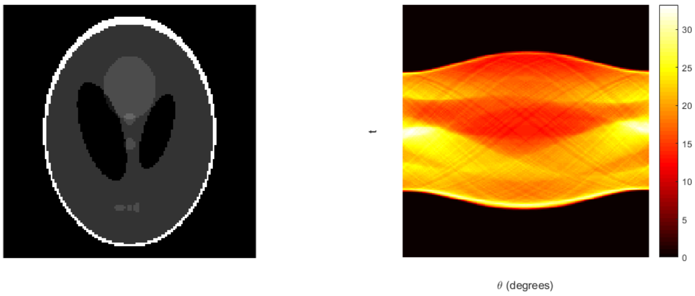
wobei U_m das Tschbyscheff-Polynom 2. Art vom Grad m ist.
Wir schreiben die Funktion $f \in L^2(\mathbb{B}^2)$ als

$$f = \sum_{m\in\mathbb{N}_0} \sum_{l=-m,\dots,m} \hat{f}(m,l) V_{m,l}, \qquad \hat{f}(m,l) = \int_{\mathbb{B}^2} f(\boldsymbol{x}) V_{m,l}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{4}$$

Dann ist die Radon-Transformierte von f durch

$$\mathcal{R}f(\varphi, s) = \sum_{m\in\mathbb{N}_0} \sum_{l=-m,\dots,m} \sqrt{\frac{\pi}{m+1}}\,\hat{f}(m,l)\,\Phi_{m,l}(\varphi, s) \tag{5}$$

gegeben, da $\mathcal{R}V_{m,l}(\varphi, s) = \sqrt{\frac{\pi}{m+1}}\,\Phi_{m,l}(\varphi, s)$ gilt.



(a) $f(x, y)$ (b) $\mathcal{R}f(\varphi, t)$

Abbildung 1: Eine Funktion und deren Radon Transformierte

Aufgabe 1

In [1] wurde ein Algorithmus gezeigt, um aus gegebenen beliebig verteilten Funktionsauswertungen $\mathcal{R}f(\varphi_k, s_k)$ die Funktion f zu rekonstruieren. Wir betrachten folgenden Algorithmus zur Berechnung der Vorwärts-Transformation:

> Gegeben: Funktionswerte $f(\boldsymbol{x}_j)$, $\boldsymbol{x}_j \in \mathbb{B}^2$.
> 1) Berechne mit (4) die Koeffizienten $\hat{f}(m, l)$ mithilfe einer Quadraturformel.
> 2) Werte die Summe (5) an den Stützstellen (φ_k, s_k) aus.
> Ausgabe: Funktionswerte $\mathcal{R}f(\boldsymbol{\omega}_k, s_k)$

Um aus den gegebenen Radon-Daten die Funktionswerte $f(\boldsymbol{x}_j)$ zu berechnen, soll dieser Algorithmus in einem iterativen Kleinste-Quadrate-Verfahren benutzt werden.

Aufgabe 2

Wir wollen die Summen (4) und (5) schnell numerisch auswerten. Die Berechnung von (5) kann mit einem Tensorporduktansatz und einer schnellen Fourier-Transformation (FFT) bezüglich φ und einer Polynomtransformation (FPT) bezüglich s genutzt werden. Diese Algorithmen sind in der NFFT-Programmbibliothek [2] implementiert.

Die schnelle Berechnung von (5) erfolgt mit dem selben Ansatz wie die NFSFT [3], nur dass hier statt der assoziierten Legendre-Funktionen $P_m^l(s)$ die Jacobi-Polynome $s^l P_{\frac{m-l}{2}}^{(0,l)}(2s^2 - 1)$ auftreten.

Hinweis: Diese Aufgabe ist auch als Bachelorarbeit geeignet.

Literatur

[1] S. De Marchi, A. Iske, and G. Santin. Image reconstruction from scattered Radon data by weighted positive definite kernel functions. *Calcolo*, 55(1):Art. 2, 24, 2018. URL: `https://doi.org/10.1007/s10092-018-0247-6`, `doi:10.1007/s10092-018-0247-6`.

[2] J. Keiner, S. Kunis, and D. Potts. NFFT 3.4.1, C and MATLAB subroutine library. `http://www.tu-chemnitz.de/~potts/nfft`.

[3] S. Kunis and D. Potts. Fast spherical Fourier algorithms. *J. Comput. Appl. Math.*, 161:75–98, 2003.

Betreuung

Prof. Dr. Daniel Potts
Email: `potts@mathematik.tu-chemnitz.de`
Adresse: Reichenhainer Str. 39, Zimmer 731

Michael Quellmalz
Email: `michael.quellmalz@mathematik.tu-chemnitz.de`
Adresse: Reichenhainer Str. 39, Zimmer 729