

Computerpraktikum

Rationale Normkurven - Gleichungen und Parametrisierungen

Aus der projektiven Geometrie ist bekannt, dass durch je zwei Punkte im Projektiven Raum eine projektive Gerade geht. Ein ähnliches Phänomen kennt man von Koniken: durch je 5 Punkte in $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ in allgemeiner Lage geht eine ebene Konik. Dies ist der Spezialfall einer allgemeinen Aussage: durch je $n + 3$ Punkte in \mathbb{P}^n in allgemeiner Lage geht genau eine rationale Normkurve vom Grad n .

Dabei verstehen wir unter einer rationalen Normkurve vom Grad n eine Abbildung, die bis auf eine lineare Koordinatentransformation von \mathbb{P}^n die folgende Gestalt hat:

$$\varphi : \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n, \quad [s : t] \mapsto [s^n : s^{n-1}t : s^{n-2}t^2 : \dots : t^n]. \quad (0.1)$$

Wenn wir Koordinaten auf \mathbb{P}^n mit x_0, \dots, x_n bezeichnen, dann ist das Bild von φ genau durch die sämtlichen 2×2 -Minoren der folgenden Matrix gegeben.

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \cdots & x_{n-1} \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \quad (0.2)$$

In der Praxis ist es oft wichtig, Gleichungen (0.2) sowie Parametrisierung (0.1) in den gegebenen Koordinaten zu kennen, d.h. nicht erst nach einem linearen Koordinatenwechsel in \mathbb{P}^n .

In dieser Aufgabe soll ein Algorithmus programmiert werden, der bei gegebener Koordinaten der $n + 3$ Punkte Gleichungen sowie Parametrisierung der rationalen Normkurve vom Grad n , die durch die gegebenen Punkte geht, bestimmt. Wenn noch Zeit bleibt, kann man sich im Anschluss Gedanken über Gleichungen für die Gesamtheit aller rationalen Normkurven vom Grad n machen, die auf einer gegebenen Hyperfläche liegen.

Die Ergebnisse sollen in einem Aufsatz zusammengefasst werden, welcher auch die theoretischen Grundlagen und eine Dokumentation der Programme beinhalten soll. Details für die Aufgabenstellung sind beim Betreuer zu erfragen. Für die theoretischen Grundlagen verweisen wir auf das Skript [Leh17] sowie [Eis05, Kapitel 6].

Betreuer:

Christian Lehn

Reichenhainer Straße 39, Raum 613

09126 Chemnitz

Telefon: +49 371 531 30 391

Email: vorname.name@mathematik.tu-chemnitz.de

Literatur

[Eis05] David Eisenbud. *The geometry of syzygies*, volume 229 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2005. A second course in commutative algebra and algebraic geometry.

[Leh17] Christian Lehn. Skript Perioden, 2017.