

Computerpraktikum

Aufgabenstellung für Sommersemester 2020:

Möglichkeiten und Grenzen der numerischen Aufdeckung von Konvergenzraten

Inverse Probleme werden mathematisch vorzugsweise durch Operatorgleichungen in unendlich dimensionalen Hilberträumen modelliert. Solche Probleme sind in der Regel nicht korrekt (schlecht gestellt), d.h. der Vorwärtsoperator ist nicht stetig invertierbar. Für lineare inverse Probleme (z.B. in Form von linearen Fredholmschen oder Volterraschen Integralgleichungen 1. Art, siehe Kapitel 3 in [1]) hat dann der lineare Vorwärtsoperator die Zahl Null als Häufungspunkt des Spektrums. Zur Überwindung der Schlechtgestellttheit setzt man konvergente Regularisierungsmethoden ein (siehe Kapitel 4 in [1]), bei denen in Abhängigkeit von der Glattheit der erwarteten Lösungen Konvergenzraten von besonderem Interesse sind.

Wenn die Analysis an ihre Grenzen stößt, können numerische Experimente Ideen für neue Erkenntnisse liefern. Dabei muss man aber stets das Problem diskretisieren, also durch ein endlich dimensionales Ersatzproblem approximieren, welches dann korrekt, aber sehr wohl noch schlecht konditioniert ist. Das Praktikum soll anhand ausgewählter Beispiele mit umfangreichen numerischen Fallstudien untersuchen, wie sich dieser Sprung ins Endlichdimensionale in der Praxis vollzieht, d.h. wie sich eine mehr oder weniger feine Diskretisierung auf die Chancen der Aufdeckung von Konvergenzraten auswirkt. In der Arbeit [2] kann beispielsweise im Abschnitt 6 durch Verwendung von 6000 Stützstellen logarithmische Konvergenz nachgewiesen werden, während man bei nur 200 Stützstellen zu einer völlig falschen Vermutung gelangt. Solche Zusammenhänge sind in der Literatur wenig beschrieben. Folglich können tragfähige Ergebnisse der Praktikumsarbeit sicherlich zu einer interessanten Publikation führen.

Betreuung:

Prof. Dr. Bernd Hofmann

Email: hofmannb@mathematik.tu-chemnitz.de

Adresse: Reichenhainer Str. 41, Zimmer 716

Literatur:

[1] B. Hofmann: *Mathematik inverser Probleme*. Teubner Verlag, Stuttgart/Leipzig 1999.

https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/inverse_probleme/fulltext/Hofmann_Lehrbuch.pdf

[2] B. Hofmann and R. Plato: Convergence results and low order rates for nonlinear Tikhonov regularization with oversmoothing penalty term. *Electronic Transactions on Numer. Anal.*, Vol. 53 (2020), pp. 313–328.

<http://etna.mcs.kent.edu/volumes/2011-2020/vol153/>