Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. R. Herzog, M. Winkler

Chemnitz, 5. Februar 2020
Abgabe am 12. Februar 2020

Grundlagen der Optimierung

Übung 15

Aufgabe 63: MFCQ ist äquivalent zur Kompaktheit der Menge der Lagrange-Multiplikatoren

(a) Es sei x_0 ein zulässiger Punkt für das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & f(x) \qquad \text{über } x \in \mathbb{R}^n \\ \text{sodass} \quad & g(x) \le 0 \\ & h(x) = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

mit stetig differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$.
Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

(a) x_0 erfüllt die MFCQ

(b) das System

$$\sum_{i \in \mathcal{A}(x_0)} \mu_i \nabla g_i(x_0) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \nabla h_j(x_0) = 0 \qquad \text{mit } \mu_i \ge 0 \; \forall i \in \mathcal{A}(x_0)$$

hat nur die triviale Lösung $(\mu, \lambda) = 0$.

Hinweis: Nutze Hausaufgabe 36.

(b) Es sei (x^*, λ^*, μ^*) ein KKT-Punkt von (1). Zeige die Äquivalenz von

(a) Die MFCQ gilt in x^*.

(b) Die Menge der zu x^* gehörenden Lagrange-Multiplikatoren $(\mu^*, \lambda^*) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ ist kompakt.

Aufgabe 64: $\mathcal{T}_X^{\text{lin}}(x_0) = \mathcal{T}_{X_{\text{lin}}(x_0)}(x_0)$

Beweise Bemerkung 16.3 (a). Folgere daraus, dass für lineare Programme

$$\begin{aligned} \min \quad & c^\top x \quad \text{über } x \in \mathbb{R}^n \\ \text{sodass} \quad & Ax = b \\ \text{und} \quad & x \ge 0 \end{aligned}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ und $c \in \mathbb{R}^n$ die Abadie-CQ (d.h. $\mathcal{T}_X(x_0) = \mathcal{T}_X^{\text{lin}}(x_0)$) in jedem zulässigen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ erfüllt ist.

Hausaufgabe 35: Grafisches Lösen, KKT-Bedingungen und `fmincon`

(a) Löse das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) := (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 \\ \text{sodass} \quad & g_1(x) := x_1^2 - x_2 \qquad \leq 0 \\ & g_2(x) := x_1 + x_2 - 2 \quad \leq 0 \end{aligned}$$

grafisch. Zeichne dazu die Niveaulinien von f und die zulässige Menge und markiere darin die optimale Lösung.

(b) Gilt LICQ in der Lösung? Bestimme die zugehörigen Lagrange-Multiplikatoren.

(c) **Zusatz:** Verwende den Befehl `fmincon` aus der Optimization-Toolbox von `Matlab`, um das Optimierungsproblem zu lösen. Lasse dir dabei auch die Lagrange-Multiplikatoren ausgeben.

Hausaufgabe 36: Ein weiterer Alternativsatz

Seien $A \in \mathbb{R}^{q \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$ zwei Matrizen mit $\operatorname{rank}(B) = p$. Zeige, dass dann entweder das System

$$Ad < 0, \quad Bd = 0$$

lösbar ist oder dass das System

$$A^\top \mu + B^\top \lambda = 0$$

eine Lösung $(\mu, \lambda) \neq 0$ mit $\mu \geq 0$ hat.
Hinweis: Farkas-Lemma 16.7