Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. R. Herzog, M. Winkler

Chemnitz, 6. Dezember 2019
Abgabe am 18. Dezember 2019

Grundlagen der Optimierung

Übung 9

Aufgabe 35: Operationen auf konvexen Mengen

Beweise Teil (c), (d) und (e) von Satz 11.3 aus der Vorlesung.

Aufgabe 36: Minkowski-Summe am Beispiel

In der Ebene sei $K = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 \leq \frac{1}{2}\}$ eine Kreisfläche und $Q = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_\infty = 2\}$ die Vereinigung der Seiten eines Quadrates. Beschreibe die Minkowski-Summe $K + Q$ anhand einer Skizze.

Aufgabe 37: Jensensche Ungleichung

Es sei $f : C \to \mathbb{R}$ mit $C \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex. Zeige, dass f genau dann konvex ist, wenn für beliebige endliche Mengen $\{x_1, \ldots, x_k\} \subset C$ und beliebige $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^k$ mit $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$ und $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \geq 0$ gilt:

$$f\Big(\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i\Big) \leq \sum_{i=1}^k \alpha_i\, f(x_i).$$

Aufgabe 38: Beispiel einer gleichmäßig konvexen Funktion

Zeige, dass die Funktion $\|Ax-b\|^2$ genau dann gleichmäßig konvex ist, wenn A injektiv ist, d. h. A vollen Spaltenrang hat.

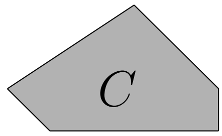
Aufgabe 39: Für konvexe Mengen C ist dist_C eine konvexe Funktion

Es sei $C \subset \mathbb{R}^n$ eine nichtleere, abgeschlossene und konvexe Menge sowie

$$\operatorname{dist}_C(x) := \inf_{y \in C} \|y - x\|_2$$

der Abstand eines Punktes $x \in \mathbb{R}^n$ zur Menge C.

(a) Skizziere für



die Levelmengen $\mathcal{L}_{\mathrm{dist}_C}(r) := \{x : \mathrm{dist}_C(x) \leq r\}$.

(b) Zeige, dass $\mathrm{dist}_C : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion ist.

Aufgabe 40: Zur Abgeschlossenheit von $\operatorname{conv} A$

Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen. Ist dann auch $\operatorname{conv} A$ abgeschlossen?

Hausaufgabe 21: Konvexität bei der Besteuerung von Ehepaaren

Betrachten wir ein Ehepaar, bei dem die Partner die Einkommen y_1 und y_2 beziehen. Es bezeichne $T(y)$ die Steuerschuld als konvexe Funktion vom Einkommen (genauer: Bemessungsgrundlage) und $E(y_1, y_2)$ die Steuerschuld des Haushaltes. In Deutschland kann das Ehepaar zwischen

(a) **Individualbesteuerung** $E(y_1, y_2) = T(y_1) + T(y_2)$ und

(b) **Ehegattensplitting**[1] $E(y_1, y_2) = 2\,T(\,(y_1 + y_2)/2\,)$

wählen.

Erläutere den steuerlichen Vorteil des Ehegattensplittings unter Verwendung des Begriffes Konvexität.

Hausaufgabe 22: Der Epigraph ist genau dann konvex, wenn f konvex ist

Sei $C \subset \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge und $f : C \to \mathbb{R}$. Die Menge

$$\mathrm{epi}(f) := \{(x, y) \in C \times \mathbb{R} : y \geq f(x)\}$$

heißt **Epigraph** von f. Zeige, dass f genau dann konvex ist, wenn $\mathrm{epi}(f)$ konvex ist. Gilt eine analoge Aussage auch für die Levelmengen $\mathcal{L}_f(r) := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq r\}$, d.h.

$$f \text{ ist konvex} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{L}_f(r) \text{ ist konvex für alle } r \in \mathbb{R}?$$

[1] Hier wird das Haushaltseinkommen gedanklich auf die beiden Partner gleich aufgeteilt und diese aufgeteilten Beträge werden dem Steuertarif unterworfen.

Hausaufgabe 23: Abschätzung des Abstandes zum globalen Minimum durch die Werte der Zielfunktion

Es sei $C \subset \mathbb{R}^n$ konvex, $C \neq \emptyset$. Weiter sei $f : C \to \mathbb{R}$ eine gleichmäßig konvexe Funktion auf C und x^* das globale Minimum von $f(x)$ über C.

(a) Man zeige, dass unter den gegebenen Voraussetzungen die Abschätzung

$$\|x - x^*\|^2 \leq \frac{2}{\mu} \, |f(x) - f(x^*)|$$

gilt.

(b) Gilt dies auch, wenn man nicht voraussetzt, dass x^* ein globales Minimum von $f(x)$ über C ist?