Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. R. Herzog, M. Winkler

Chemnitz, 14. November 2019
Abgabe am 27. November 2019

Grundlagen der Optimierung

Übung 6

Aufgabe 24: Papier-Zuschneide-Problem: Modellierung

Eine Papierfabrik produziert Papierrollen mit einer Breite von 3m. Für die Kunden muss die Fabrik die Rollen auf die gewünschte Breite zurechtschneiden. Eine Papierrolle kann beispielsweise in 2 x 0,93m und 1 x 1,08m geteilt werden. Die verbleibenden 0,06m sind Abfall. Der Fabrik liegen die folgenden Aufträge vor:

- 97 Rollen mit einer Breite von 1,35m,
- 610 Rollen mit einer Breite von 1,08m,
- 395 Rollen mit einer Breite von 0,93m,
- 211 Rollen mit einer Breite von 0,42m.

Die Fabrik möchte zur Erfüllung des Auftrages so wenig Rollen wie möglich einsetzen. Wie müssen diese geschnitten werden? Modelliere des Problem als lineares Optimierungsproblem.

Aufgabe 25: Arbitrage im Devisenhandel

Wir betrachten den internationalen Geldhandel. Für zwei gegebene Währungen ist ein gewisser Umtauschsatz festgelegt. Betrachten wir die Währungen USD, Yen, Mark und Franc und bezeichnen wir mit w_{ij} den Umtauschkurs von Währung i in Währung j, so lagen am 10. November 1996 folgende Umtauschkurse vor:

$$W = \begin{pmatrix} - & 111.52 & 1.4987 & 5.0852 \\ 0.008966 & - & 0.013493 & 0.045593 \\ 0.6659 & 73.964 & - & 3.3823 \\ 0.1966 & 21.933 & 0.29507 & - \end{pmatrix}.$$

Wechselt man nun 1 USD in Yen, dann in Mark und wieder zurück in USD, so erhält man 1.002 USD. Dies ist natürlich im Geldhandel nicht erwünscht. Gib ein lineares Programm an, mit dem überprüft werden kann, ob bei einer gegebenen Matrix $W \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (die Diagonalelemente w_{ii} können ignoriert werden) für n Währungen eine solche Situation möglich ist.

Aufgabe 26: Basisvektoren eines LPs bestimmen

Gegeben sei das Polyeder in Normalform $P = \{x \in \mathbb{R}^7 \mid Ax = b, x \geq 0\}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Vektoren sind (zulässige) Basisvektoren des Polyeders P?

(a) $x = (2, 1, 3, -2, 0, 0, 0)^\top$

(b) $x = (1, 0, 3, 0, 1, 0, 0)^\top$

(c) $x = (1, 0, 3, 0, 3, 1, 0)^\top$

(d) $x = (2, 2, 0, 0, 0, 0, 3)^\top$

(e) $x = (2, 1, 1, 0, 2, 0, 2)^\top$

Aufgabe 27: Beweis von Satz 6.13

Beweise Satz 6.13 aus der Vorlesung.

Hausaufgabe 14: Beispielaufgabe lineare Optimierung

Bestimme den Minimalwert der Zielfunktion $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n$ unter den Nebenbedingungen $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_i \geq i \; \forall i = 1, \ldots, n$ und $x_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n$.

Hausaufgabe 15: Modellierung des Ernährungsproblems (*Diet Problem*)

Folgendes Beispiel findet sich in George B. Dantzig (Erfinder der Simplex-Methode), Linear Programming and Extensions, Princeton University Press, 1998 (Neuauflage des Klassikers von 1963), Seite 117:

Formulate as a linear programming problem: Suppose six foods listed below have calories, amounts of protein, calcium, vitamin A, and costs per pound purchased as shown. In what amounts should these foods be purchased in order to meet exactly the daily equivalent per person shown in the last column at minimum cost? How is the model modified if the daily requirements may be exceeded; if the requirements except for calories may be exceeded?

	Contents and Costs Per Pound Purchased						Daily	
	Bread	Meat	Potatoes	Cabbage	Milk	Gelatin	Requirements	
Calories	1254	1457	318	46	309	1725	3000	
Protein	39	73	8	4	16	43	70	(grams)
Calcium	418	41	42	141	536	–	800	(mg.)
Vitamin A	–	–	70	860	720	–	500	(I.U.)
Cost	\$ 0.30	\$ 1.00	\$ 0.05	\$ 0.08	\$ 0.23	\$ 0.48	Minimum	

Löse das Problem mit MATLAB, zum Beispiel mit der Funktion `linprog` (`help linprog` liefert die Dokumentation zu dieser Funktion). Wieso sollte das Ergebnis mit Vorsicht behandelt werden? Welche Kritikpunkte gibt es an dem Modell? Welche Erweiterungen wären denkbar?

Hausaufgabe 16: Innerste Punkte eines Polyeders

Es sei ein konvexer Polyeder $\mathcal{P}$ gegeben (z. B. ein Dreieck im 2D), also der Durchschnitt von m Halbräumen. Die Halbräume werden durch die Ungleichungen

$$a_i^\top x \leq b_i,\ i = 1, \ldots, m$$

mit $a_i \in \mathbb{R}^n$ und $b \in \mathbb{R}$ beschrieben. Der Polyeder ergibt sich damit als

$$\mathcal{P} := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : a_i^\top x \leq b_i,\ i = 1, \ldots, m \right\}.$$

Es ist eine möglichst große Kugel gesucht, welche vollständig in dem Polyeder $\mathcal{P}$ liegt. Ihr Mittelpunkt heißt **Tschebyschow-Zentrum**, ein Punkt also, der den größtmöglichen Abstand zu den Seitenflächen hat (innerster Punkt).

(a) Wie kann der Abstand eines Punktes zu einer Ebene mit Hilfe der Hesseschen Normalform berechnet werden?

(b) Wie lauten die Bedingungen, dass eine Kugel zum Mittelpunkt x und Radius r vollständig innerhalb des Polyeders $\mathcal{P}$ liegt?

(c) Wie lässt sich die Aufgabe, einen innersten Punkt zu finden, als ein lineares Optimierungsproblem formulieren?

(d) Freiwillig: Löse das Problem mit `linprog` für folgende gegebene Halbräume im 2D:

Halbraum i	a_i	b_i
1	$(0, -1)$	0
2	$(-1, 0)$	0
3	$(1, -1)$	1
4	$(1, 2)$	4