Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. R. Herzog, M. Winkler

Chemnitz, 8. November 2019
Abgabe am 19. November 2019

Grundlagen der Optimierung
Übung 5

Aufgabe 19: Affine Invarianz des Newton-Verfahrens

(a) Zeige, dass die vom lokalen Newton-Verfahren zur Lösung von $F(x) = 0$ mit $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ erzeugte Folge invariant gegenüber affin-linearen Transformationen ist. Damit ist gemeint: Seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulär und $c \in \mathbb{R}^n$. Das lokale Newton-Verfahren zur Lösung von $F(x) = 0$ mit Start im Punkt x_0 erzeuge die Folge $\{x_k\}$. Das lokale Newton-Verfahren für die Funktion $G(y) := F(Ay + c)$ mit Start in y_0 erzeuge die Folge $\{y_k\}$. Aus $x_0 = Ay_0 + c$ folgt $x_k = Ay_k + c$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

(b) Gilt das auch für das lokale Newton-Verfahren zur Minimierung einer Funktion f?

(c) Ist auch das Gradientenverfahren (mit dem euklidischen Skalarprodukt) mit fester Schrittweite 1 invariant gegenüber affin-linearen Transformationen?

Aufgabe 20: Konvergenz des vereinfachten Newton-Verfahrens

Man betrachte anstelle der Newton-Folge die vereinfachte Newton-Folge

$$x_{k+1} = x_k - F'(x_0)^{-1}F(x_k).$$

Es sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine einmal stetig differenzierbare Funktion und $x^* \in \mathbb{R}^n$ mit $F(x^*) = 0$ und die Jacobimatrix $F'(x^*)$ regulär. Zeige, dass eine Umgebung $\mathcal{U}(x^*)$ um x^* existiert, sodass für jedes $x_0 \in \mathcal{U}(x^*)$ gilt:

(a) Das vereinfachte Newton-Verfahren ist wohldefiniert und erzeugt eine gegen x^* konvergente Folge $\{x_k\}$.

(b) Die Konvergenzrate ist q-linear.

Was sind Vor- und Nachteile gegenüber dem normalen Newton-Verfahren?

Aufgabe 21: Einschränkung $\sigma \in (0, \frac{1}{2})$ sichert die quadratische Konvergenz

In Algorithmus 5.11 (Globalisiertes Newtonverfahren) aus der Vorlesung wird der Armijo-Schrittweitenparameter σ auf $\sigma \in (0, \frac{1}{2})$ eingeschränkt, um die lokal quadratische Konvergenzgeschwindigkeit des Newton-Verfahrens zu ermöglichen. Zeige anhand der quadratischen Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^\top Qx + c^\top x + \gamma$ ($Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ s.p.d., $c \in \mathbb{R}^n, \gamma \in \mathbb{R}$) die Notwendigkeit der beschriebenen Einschränkung und fertige für den Fall $n = 1$ eine Skizze an.

Aufgabe 22: Überführen auf Normalform am Beispiel

Gegeben ist die lineare Optimierungsaufgabe

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \min & -2v_1 & - & 3v_2 & - & 4v_3 & & \\ \text{sodass} & v_1 & + & v_2 & + & v_3 & \leq & 4 \\ & & & 3v_2 & + & v_3 & \leq & 6 \\ & & & & & \multicolumn{3}{r}{v_1 \leq 2,\, v_3 \leq 3\ .} \end{array}$$

Überführe das lineare Optimierungsproblem auf Normalform.

Aufgabe 23: Grafisches Lösen eines LPs

Lösen Sie grafisch folgende Aufgabe der linearen Optimierung

$$\begin{array}{lccl} \max & c^\top x & & \\ \text{sodass} & x_1 & \geq & -x_2 \\ & x_1 & \geq & -\frac{1}{2} \\ & x_2 & \in & [-1, 1] \end{array}$$

mit verschiedenen Kostenvektoren $c \in \{(-1,0)^\top, (-1,-2)^\top, (0.01,-2)^\top\}$.

Hausaufgabe 12: Implementation des globalisierten Newton-Verfahrens

Implementiere das globalisierte Newton-Verfahren mit allgemeinen Skalarprodukt und Armijo-Schrittweitenstrategie in Matlab (Algorithmus 5.11 aus der Vorlesung). Verwende das Abbruchkriterium aus Bemerkung 4.7 (a) und (b). Erstelle dazu eine Datei `newton_method.m` und verwende

```
function X = newton_method(fh, M, x0, tol, s, sigma, beta, rho, p)
```

als erste Zeile. Dabei bezeichnet `fh` das Handle auf eine Funktion, `M` die Skalarprodukt induzierende Matrix, `x0` den Startpunkt, `tol` eine Struktur, welche die vier Parameter `ATOL_f`, `RTOL_f`, `ATOL_x` und `RTOL_x` für das Abbruchkriterium aus Bemerkung 4.7 (a) und (b) enthält, `s`, `sigma` und `beta` die Parameter für die Armijo-Schrittweitensuche und `rho` und `p` die im Algorithmus 5.11 verwendeten Parameter, um eine gute Abstiegsrichtung zu gewährleisten. Zurückgegeben werden soll eine Matrix $X = [x0, x1, x2, \ldots]$, welche den gesamten Iterationsverlauf enthält.

Teste das implementierte Verfahren an den Funktionen aus Übung 3, Hausaufgabe 8. mit `rho`$=1$ und `p`$=3$. Visualisiere den Iterationsverlauf und vergleiche die hier benötigten Iterationen mit denen des Gradienten-Verfahrens.

Schicke die erzeugten Dateien an `max.winkler@mathematik.tu-chemnitz.de` (Betreff: HA Grundlagen der Optimierung Übung 5)!

Hinweis 1: Es können die Dateien von der Webseite der Lehrveranstaltung verwendet werden. Mit dem Skript `solution_ha_12.m` kann die Implementierung getestet werden. Ferner werden die Dateien `cosine.m`, `himmelblau.m`, `rosenbrock.m` und `general_quadratic_function.m` von Übung 3, Hausaufgabe 8 benötigt.

Hinweis 2: Der Quelltext ist angemessen zu kommentieren.

Hausaufgabe 13: Formulierung als lineare Optimierungsprobleme

Formuliere folgende Probleme als lineare Optimierungsprobleme (nicht notwendig in Normalform):

(a)

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_1$$

(b)

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_\infty$$

dabei sind $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ und $\|y\|_1 = \sum_{i=1}^m |y_i|$ sowie $\|y\|_\infty = \max\limits_{i=1,\dots,m} |y_i|$.