Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. R. Herzog, M. Winkler

Chemnitz, 1. November 2019
Abgabe am 12. November 2019

Grundlagen der Optimierung
Übung 4

Aufgabe 15: Newton-Verfahren zur Nullstellensuche am Beispiel

Wir suchen Nullstellen des folgenden Polynoms

$$f(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 + 21x - 18.$$

Bestimmen Sie ausgehend von Startpunkt $x^{(0)} = 0$ mit dem Newton-Verfahren die Näherung einer Nullstelle bis zur Genauigkeit $|f(x^{(k)})| < 0.01$.

Aufgabe 16: Gegenbeispiel zum lokalen Konvergenzsatz 5.8

Wir wollen ausgehend vom Startpunkt $x_0 = 1$ die Nullstelle der Funktion

$$f(x) = x^2$$

mit dem Newton-Verfahren bestimmen. Berechne die Iterierten und ordne den passenden Konvergenzbegriff zu. Ist dies ein Widerspruch zu Satz 5.8?

Aufgabe 17: Konvergenzverhalten des Newton-Verfahrens am Beispiel

Wir betrachten das lokale Newton-Verfahren zur Minimierung der Funktion $f(x) = \cos x$. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass es quadratisch gegen einen stationären Punkt konvergiert, wenn man nur nah genug daran startet. Ansonsten lässt sich allerlei Unfug treiben.

(a) Bestimme einen Startpunkt x_0, sodass (bei exakter Rechnung) die Folge der Iterationspunkte x_k bestimmt gegen ∞ divergiert.

(b) Bestimme einen Startpunkt x_0, sodass die Folge der Iterationspunkte zwischen zwei verschiedenen (nichtoptimalen) Punkten alterniert.

Aufgabe 18: q-lineare, q-superlineare und q-quadatische Konvergenz

Zeige, dass aus der q-superlinearen bzw. q-quadratischen Konvergenz einer Folge bzgl. einer Norm $\|\cdot\|_a$ die q-superlineare bzw. q-quadratische Konvergenz in einer äquivalenten Norm $\|\cdot\|_b$ folgt. Warum funktioniert diese Argumentation bei der q-linearen Konvergenz nicht?

Hinweis: Normäquivalenz bedeutet: Es gibt Konstanten $\underline{c} > 0$ und $\overline{c} > 0$, sodass gilt:

$$\underline{c}\,\|x\|_b \leq \|x\|_a \leq \overline{c}\,\|x\|_b \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Hausaufgabe 10: Lokales Newton-Verfahren zur Nullstellenbetimmung

Implementiere das lokale Newton-Verfahren aus Algorithmus 5.1 für die Nullstellenbestimmung einer Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Erzeuge dazu eine Datei `local_newton.m` und verwende als erste Zeile:

```
function X = local_newton(fhandle, x0)
```

Dabei ist `fhandle` ein Zeiger auf eine Funktion und `x0` der Startpunkt. Wähle ein sinnvolles Abbruchkriterium (z.B. $\|f(x^{(k)})\| \leq \mathrm{TOL}$ und $k \leq k_{max}$). Der Rückgabewert `X` soll ein Zeilenvektor ($n = 1$) bzw. eine Matrix mit n Zeilen sein, welche alle im Verfahren erzeugten Iterierten beinhalten, d. h. $X = (x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(k_{end})})$.

(a) Als erster Test soll die Funktion $f(x) = -\sin(x)$ verwendet werden (das ist die Ableitung der Funktion aus Aufgabe 17). Implementiere diese Funktion in einer Datei `sinus.m` mit erster Zeile

```
function [f,Df] = sinus(x)
```

welche den Funktionswert `f` und den Wert der ersten Ableitung `Df` an der Stelle x zurück gibt. Das Verfahren kann mit den Befehlen

```
x=local_newton(@sinus,1);
f=sinus(x(end))
```

getestet werden. Der Wert von `f` sollte nahe 0 sein.

Zusatzfrage: Warum liefert das Verfahren für die kritischen Startpunkte $x_0 = 1.656$ und $x_0 = \arctan(-2\pi)$ eine Lösung? Ist das nicht ein Widerspruch zu Aufgabe 17?

(b) Teste, ob der Algorithmus für die vektorwertige Funktion

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - 6 \\ x^3 - y^2 \end{pmatrix}$$

mit dem Startpunkt $x_0 = (1.2 \;\; 1.2)^\top$ funktioniert. Implementiere diese Funktion zunächst in einer neuen Datei `test_funct_2d.m` mit der ersten Zeile

```
function [f,Df] = test_funct_2d(X)
```

so dass für jeden Spaltenvektor `X=[x; y]` der Funktionswert `f` und die Jacobi-Matrix `Df` zurückgegeben wird.

Beachte, dass im Newton-Verfahren nun in jeder Iteration ein lineares Gleichungssystem gelöst werden muss (MATLAB: Backslash-Operator "\"). Bei einer geschickten Implementierung sollte in `local_newton.m` nirgendwo eine Fallunterscheidung $n = 1$ oder $n = 2$ auftauchen.

Hinweis: Es kann die Datei `solution_ha_10.m` von der Webseite der Lehrveranstaltung verwendet werden um die implementierten Funktionen zu testen. Dieses Skript plottet den Iterationsverlauf und stellt diesen grafisch dar. Durch Drücken einer beliebigen Taste im "Command Window" kann man zur nächsten Iterierten wechseln.

Hausaufgabe 11: Affine Invarianz des Newton-Verfahrens

Zeige, dass die vom lokalen Newton-Verfahren zur Lösung von $F(x) = 0$ mit $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ erzeugte Folge invariant gegenüber affin-linearen Transformationen ist. Damit ist gemeint: Seien $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulär und $c \in \mathbb{R}^n$. Das lokale Newton-Verfahren zur Lösung von $F(x) = 0$ mit Start im Punkt x_0 erzeuge die Folge $\{x_k\}$. Das lokale Newton-Verfahren für die Funktion $G(y) := F(Ay + c)$ mit Start in y_0 erzeuge die Folge $\{y_k\}$. Aus $x_0 = Ay_0 + c$ folgt $x_k = Ay_k + c$ für alle $k \in \mathbb{N}$.