Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. R. Herzog, M. Winkler

Chemnitz, 8. Oktober 2019
Abgabe am 22. Oktober 2019

Grundlagen der Optimierung

Übung 1

Aufgabe 1: Lineares Optimierungsproblem

Ein Zweitaktmotor wird mit einem Öl-Benzin-Gemisch betrieben. Dabei ist zu beachten, dass dieses Gemisch mindestens 4 Prozent Öl enthält, aber auch mindestens 85 Prozent Benzin. Das Gemisch soll möglichst kostengünstig sein. Formuliere eine passende Optimierungsaufgabe!

Aufgabe 2: Nichtlineares Optimierungsproblem

Ein Unternehmen will eine bestimmte Menge M eines Gutes einkaufen und holt dazu Angebote von n Lieferfirmen ein, von denen keine die gewünschte Gesamtmenge alleine liefern kann. Anbieter i liefert maximal m_i, wobei der Preis $f_i(x_i)$ von der Bestellmenge x_i abhängt. Die Funktionen f_i, $i = 1, \ldots, n$ sind monoton wachsend und (üblicherweise) konkav. Formuliere ein entsprechendes Optimierungsproblem, so dass die Gesamtkosten für alle Einkäufe minimiert werden.

Aufgabe 3: Ganzzahliges Optimierungsproblem

In einer Tischlerei werden drei Sorten Tische produziert. Die Lieferung einer Mindestanzahl von Tischen wurde bereits vertraglich mit den Kunden vereinbart. Erstellen Sie ein Modell, welches den Gewinn maximiert und die angegebenen Zeit- bzw. Materialkapazitäten einhält.

in gewissen Einheiten	Tisch 1	Tisch 2	Tisch 3	Kapazität
Gewinn je Stück	3	1	2	
Zeitaufwand je Stück	2	1	1	40
Materialaufwand je Stück	4	2	3	100
vereinbarte Menge	3	2	2	

Aufgabe 4: Lineares Optimierungsproblem

Eine Firma besitzt zwei Fabriken F_1, F_2 und zwölf Verkaufsstellen $V_1, \ldots, V_{12}$. Jede Fabrik F_i produziert pro Woche die Menge p_i eines bestimmten Produktes. Jede Verkaufsstelle V_j hat eine bekannte wöchentliche Nachfrage n_j an diesem Produkt, die

gedeckt werden muss. Die Kosten, eine Einheit von Fabrik F_i zur Verkaufsstelle V_j zu transportieren, seien c_{ij}, und die zu transportierende Menge sei x_{ij}. Wie muss die Produktion auf die Verkaufsstellen verteilt werden, um die Transportkosten zu minimieren und die Nachfrage zu decken?

Aufgabe 5: Inverses Problem

Eine an einer Feder befestigte Masse m bewegt sich unter dem Einfluss von Dämpfung gemäß der Differentialgleichung

$$m\ddot{y} + r\dot{y} + ky = 0.$$

In einem Experiment mit Anfangsanregung

$$y(0) = y_0, \qquad \dot{y}(0) = 0$$

soll zu verschiedenen Zeitpunkten t_i, $i = 1, \ldots, N$ die Auslenkung y_i gemessen werden. Formuliere ein Optimierungsproblem zur Bestimmung der unbekannten Dämpfungs- und Federkonstanten r und k.

Hinweis: Die zu minimierende Zielfunktion soll die Abweichung der Lösung $y(t)$ des Modells von der experimentell bestimmten Lösung y_i, $i = 1, \ldots, n$, beschreiben.

Aufgabe 6: Zusammenhang Definitheit und Eigenwerte einer Matrix

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt **positiv definit** ($A \succ 0$), falls

$$x^\top A\, x > 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ gilt. Gilt nur „$\geq$“, so heißt sie **positiv semidefinit** ($A \succeq 0$). Analog definiert man **negativ definit** ($A \prec 0$) und **negativ semidefinit** ($A \preceq 0$).

(a) Zeigen Sie: Eine *symmetrische* Matrix ist genau dann positiv definit (positiv semidefinit), falls alle Eigenwerte der Matrix positiv (nicht negativ) sind.

(b) Sind folgende Matrizen positiv (semi-)definit?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Hausaufgabe 1: Zuordnungsproblem

Fünf Reiter eines Reitvereins möchten an einem Dressurwettbewerb teilnehmen. Ihr Verein stellt fünf Schulpferde zur Verfügung. Die einzelnen Reiter kommen mit den verschiedenen Pferden unterschiedlich gut zurecht und haben damit auch unterschiedliche Gewinnchancen. Zudem verlangt das Reglement des Wettbewerbs, dass kein Reiter

und kein Pferd mehrfach starten darf. Es soll eine Zuordnung von Reitern zu Pferden gefunden werden, die die Summe der Gewinnchancen maximiert. Formuliere ein entsprechendes Optimierungsproblem!

Hinweis: Modellieren Sie das Problem mit Hilfe der folgenden Variablen.

$$\text{Entscheidungsvariablen } x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls Reiter } i \text{ auf Pferd } j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Gegeben seien die Gewinnchancen von Reiter i auf Pferd j durch c_{ij}.

Hausaufgabe 2: Frachtproblem

Es sollen $5000\,m^3$ einer Ware innerhalb eines Planungszeitraumes vom Produzenten zu einem Kunden gebracht werden. Die Ware wird in gleichen quaderförmigen Behältern der Höhe x_1, Breite x_2 und Länge x_3 (in m) transportiert, deren Volumen höchstens $1\,m^3$ ist und die beim Kunden verbleiben. Das Material für Boden und die vier Seiten der Behälter kostet 4.00 Euro pro m^2. Die Deckel können aus einem Material hergestellt werden, das 0.50 Euro pro m^2 kostet, von dem im Planungszeitraum aber nur $6500\,m^2$ erhältlich sind. Die Frachtkosten betragen 50 Euro für jeden Behälter. Die Frage ist jetzt, wie die Behälter zu bemessen sind, um die Gesamtkosten möglichst gering zu halten. Modelliere diese Aufgabe.

Hausaufgabe 3: Stetige Abhängigkeit der Eigenwerte von den Matrixeinträgen

Beweisen Sie: Für zwei symmetrische Matrizen $A, E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt

$$|\lambda_k(A+E) - \lambda_k(A)| \leq \|E\|_2,$$

wobei die Eigenwerte aufsteigend sortiert sind ($\lambda_1(A) \leq \lambda_2(A) \leq \cdots \leq \lambda_n(A)$). Insbesondere hängen die Eigenwerte stetig von den Einträgen der Matrix ab.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst

$$\lambda_k(A) + \lambda_1(E) \leq \lambda_k(A+E) \leq \lambda_k(A) + \lambda_n(E)$$

mittels des Minimax-Theorems von Courant-Fischer:

$$\lambda_k(A) = \min_{\substack{U \text{ Unterraum} \\ \dim U = k}} \max_{\substack{x\in U \\ \|x\|=1}} x^\top A\, x.$$