§ 10 Innere-Punkte-Verfahren

Literatur: Geiger, Kanzow, 2002, Kapitel 4.1

Innere-Punkte-Verfahren (**IP-Verfahren**) oder „interior point methods“ bewegen sich im Gegensatz zum Simplex-Verfahren im (relativen) Inneren des zulässigen Polyeders zu einer Lösung. Sie sind eine Alternative insbesondere für große LP und außerdem verallgemeinerbar auf allgemeine nichtlineare Optimierungsaufgaben.

Wir betrachten wieder das primale LP in Normalform

$$\text{Minimiere} \quad c^\top x \quad \text{sodass} \quad Ax = b \quad \text{und} \quad x \geq 0 \tag{10.1}$$

mit dem dualen LP

$$\text{Maximiere} \quad b^\top \lambda \quad \text{sodass} \quad A^\top \lambda + s = c \quad \text{und} \quad s \geq 0 \tag{10.2}$$

und den notwendigen und hinreichenden Optimalitätsbedingungen

$$\left.\begin{aligned} A^\top \lambda + s &= c, & s &\geq 0 & &\text{duale Zulässigkeit} \\ Ax &= b, & x &\geq 0 & &\text{primale Zulässigkeit} \\ x_i\, s_i &= 0, & i &= 1, \ldots, n & &\text{Komplementarität.} \end{aligned}\right\} \tag{10.3}$$

Wir wissen nach Satz 8.5, dass eine Lösung (x, λ, s) von (10.3) gleichzeitig Lösungen von (10.1) und (10.2) liefert. Wir konzentrieren uns daher nun auf sogenannte **primal-duale Innere-Punkte-Verfahren** zur Lösung von (10.3).

Wir betrachten dazu folgende Störung des Optimalitätssystems (10.3):

$$\left.\begin{aligned} A^\top \lambda + s &= c, & s &> 0 \\ Ax &= b, & x &> 0 \\ x_i\, s_i &= \tau, & i &= 1, \ldots, n. \end{aligned}\right\} \tag{10.4}$$

mit einem Parameter $\tau > 0$.

Falls existent, so heißt die Abbildung

$$\tau \mapsto (x^{(\tau)}, \lambda^{(\tau)}, s^{(\tau)})$$

der **zentrale Pfad**, und (10.4) heißen **Zentraler-Pfad-Bedingungen** (**ZPB**). Die Idee der Innere-Punkte-Verfahren besteht darin, den Pfad für $\tau \searrow 0$ zu verfolgen.

Alternative Betrachtungsweise: Wir führen das zu (10.1) gehörige (primale) logarithmische **Barriere-Problem** ein:

$$\text{Minimiere} \quad c^\top x - \tau \sum_{i=1}^n \ln(x_i) \quad \text{sodass} \quad Ax = b \quad \text{und} \quad x > 0. \tag{10.5}$$

Das zum dualen Problem (10.2) gehörige Barriere-Problem lautet analog

$$\text{Maximiere} \quad b^\top \lambda + \tau \sum_{i=1}^n \ln(s_i) \quad \text{sodass} \quad A^\top \lambda + s = c \quad \text{und} \quad s > 0. \tag{10.6}$$

Den Zusammenhang zwischen (10.5), (10.6) und dem gestörten Optimalitätssystem (10.4) stellt der folgende Satz her, der ein Analogon zu Satz 8.5 ist.

Satz 10.1 (Notwendige und hinreichende Optimalitätsbedingungen)**.**

Es sei $\tau > 0$ gegeben.

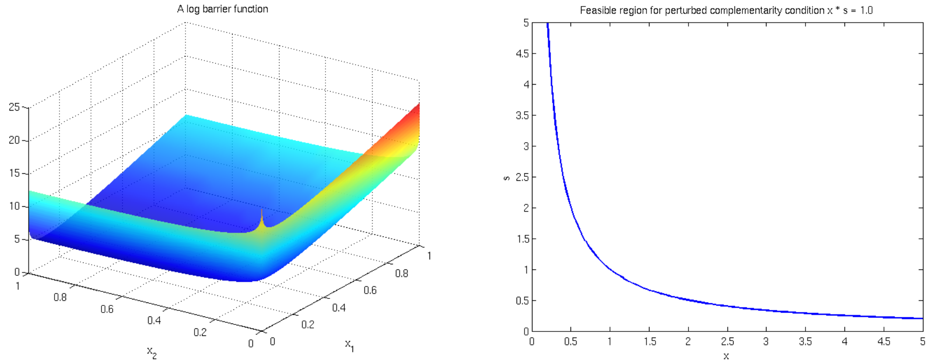

ABBILDUNG 10.1. Ein Barrierefunktional mit $c = (10, 1)^\top$ und $\tau = 1$ (links) und zulässige Region bzgl. der gestörten Komplementaritätsbedingung $x\,s = \tau$ (rechts).

(a) Ist $x^{*(\tau)}$ eine Lösung des primalen Barriere-Problems (10.5), dann existieren $(\lambda^{*(\tau)}, s^{*(\tau)})$, sodass $(x^{*(\tau)}, \lambda^{*(\tau)}, s^{*(\tau)})$ das System (10.4) erfüllt.

(b) Ist $(\lambda^{*(\tau)}, s^{*(\tau)})$ eine Lösung des dualen Barriere-Problems (10.6), dann existiert $x^{*(\tau)}$, sodass $(x^{*(\tau)}, \lambda^{*(\tau)}, s^{*(\tau)})$ das System (10.4) erfüllt.

(c) Erfüllt $(x^{*(\tau)}, \lambda^{*(\tau)}, s^{*(\tau)})$ das System (10.4), dann ist $x^{*(\tau)}$ eine Lösung von (10.5), und $(\lambda^{*(\tau)}, s^{*(\tau)})$ ist eine Lösung von (10.6).

Beweis: Ein vollständiger Beweis folgt später[47] (Satz 17.8), siehe auch Geiger, Kanzow, 2002, Satz 4.1. □

Beachte: Das Pfad-Problem (10.4) hat nicht immer eine Lösung!

Beispiel 10.2 (Unlösbares Pfad-Problem)**.**
Wir betrachten als primale Aufgabe:

$$\text{Minimiere} \quad x_1 + x_2 \quad \text{sodass} \quad x_1 + x_2 = 0 \quad \text{und} \quad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

mit der eindeutigen Lösung $x^* = (0, 0)^\top$. Im zugehörigen Pfad-Problem (10.4) widersprechen sich jedoch $x_1 + x_2 = 0$ und $x > 0$, sodass (10.4) keine Lösung besitzt. (Wegen Satz 10.1 besitzen dann auch (10.5) und (10.6) keine Lösung.)

Wir untersuchen jetzt die Lösbarkeit von (10.4).

Definition 10.3 (Primal-dual zulässige Menge)**.**
Die Menge

$$\mathcal{F} := \{(x, \lambda, s) : Ax = b,\ A^\top\lambda + s = c,\ x \geq 0,\ s \geq 0\}$$

heißt die **(primal-dual) zulässige Menge** und

$$\mathcal{F}_0 := \{(x, \lambda, s) : Ax = b,\ A^\top\lambda + s = c,\ x > 0,\ s > 0\}$$

die **(primal-dual) strikt zulässige Menge**.

[47] Es geht auch ad hoc.

Wegen Satz 10.1 ist $\mathcal{F}_0 \neq \emptyset$ notwendig dafür, dass (10.4) und damit (10.5) und (10.6) Lösungen besitzen. Dies ist aber auch hinreichend:

Satz 10.4 (Existenz einer Lösung für das primale Barriere-Problem[48])**.**
Die strikt zulässige Menge $\mathcal{F}_0$ sei nichtleer. Dann besitzt das primale Barriere-Problem (10.5) für jedes $\tau > 0$ eine Lösung $x^{*(\tau)}$.[49] (Nach Satz 10.1 besitzen also auch (10.4) und (10.6) Lösungen.)

Beweis: Es seien $\tau > 0$ und ein $(x_0, \lambda_0, s_0) \in \mathcal{F}_0$ gegeben. Es gilt also

$$A^\top \lambda_0 + s_0 = c, \quad Ax_0 = b, \quad x_0 > 0, \quad s_0 > 0. \tag{$*$}$$

Wir bezeichnen mit

$$B^{(\tau)}(x) = c^\top x - \tau \sum_{i=1}^n \ln(x_i)$$

die Zielfunktion in (10.5). Wir werden zeigen, dass die (Sub-)Levelmenge

$$\mathcal{L}(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, \quad x \geq 0, \quad B^{(\tau)}(x) \leq B^{(\tau)}(x_0)\}$$

kompakt ist. (Nichtleer ist sie wegen $x_0 \in \mathcal{L}(x_0)$.) Das Barriere-Problem (10.5) ist daher äquivalent zur Minimierung der stetigen Funktion $B^{(\tau)}$ über der kompakten Menge $\mathcal{L}(x_0)$, besitzt also eine globale Lösung, vgl. Satz 1.4. Die eigentlich benötigte strengere Bedingung $x > 0$ in der Definition von $\mathcal{L}(x_0)$ ergibt sich automatisch aus $B^{(\tau)}(x) \leq B^{(\tau)}(x_0)$.

Offenbar ist $\mathcal{L}(x_0)$ abgeschlossen.[50] Für $x \in \mathcal{L}(x_0)$ folgt aus ($*$)

$$\begin{aligned} B^{(\tau)}(x) + \tau \sum_{i=1}^n \ln(x_i) &= c^\top x \\ &= c^\top x - \lambda_0^\top (Ax - b) \\ &= c^\top x - x^\top A^\top \lambda_0 + b^\top \lambda_0 \\ &= c^\top x - x^\top (c - s_0) + b^\top \lambda_0 \\ &= x^\top s_0 + b^\top \lambda_0. \end{aligned}$$

Daher gilt

$$\begin{aligned} & B^{(\tau)}(x) \leq B^{(\tau)}(x_0) \\ \Leftrightarrow \quad & x^\top s_0 + b^\top \lambda_0 - \tau \sum_{i=1}^n \ln(x_i) \leq B^{(\tau)}(x_0) \\ \Leftrightarrow \quad & \sum_{i=1}^n \big[x_i s_{0,i} - \tau \ln(x_i)\big] \leq B^{(\tau)}(x_0) - b^\top \lambda_0 =: \text{const} \end{aligned}$$

Die Funktionen

$$x_i \mapsto [x_i s_{0,i} - \tau \ln(x_i)]$$

sind auf $\mathbb{R}^+$ wegen $s_{0,i} > 0$ nach unten beschränkt und konvergieren gegen ∞ für $x_i \to \infty$. Daher ist $\mathcal{L}(x_0)$ auch beschränkt, also kompakt. □

[48]**Beachte:** (10.4) ist also nicht nur die Störung des Optimalitätssystems (10.3), sondern seinerseits das Optimalitätssystem für die gestörte Aufgabe (10.5) (und (10.5)).

[49]**Lies:** globales Minimum, denn (10.5) ist eine konvexe Aufgabe, vgl. Satz 11.16.

[50]als Schnitt von Urbildern abgeschlossener Mengen unter stetigen Funktionen

Folgerung 10.5 (Existenz des zentralen Pfades)**.**

Die strikt zulässige Menge $\mathcal{F}_0$ sei nichtleer. Dann besitzen die ZPB (10.4) für jedes $\tau > 0$ eine Lösung $(x^{*(\tau)}, \lambda^{*(\tau)}, s^{*(\tau)})$. Dabei sind die (x, s)-Komponenten eindeutig bestimmt. Besitzt A vollen Zeilenrang ($\operatorname{rang}(A) = m$), so ist auch $\lambda^{*(\tau)}$ eindeutig.

Beweis: Nach Satz 10.4 besitzt das primale Barriere-Problem (10.5) für jedes $\tau > 0$ eine Lösung $x^{*(\tau)}$. Wegen Satz 10.1 existieren dann Vektoren $\lambda^{*(\tau)}$ und $s^{*(\tau)}$, sodass $(x^{*(\tau)}, \lambda^{*(\tau)}, s^{*(\tau)})$ eine Lösung von (10.4) ist.

Zur Eindeutigkeit: Das primale Barriere-Problem (10.5) besitzt eine strikt konvexe Zielfunktion (Definition 11.9), und die zulässige Menge

$$\{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, \quad x > 0\}$$

ist konvex. Daher ist $x^{*(\tau)}$ eindeutig bestimmt, siehe Satz 11.16. Aufgrund der Bedingungen $x_i^* s_i^* = \tau$ für $i = 1, \ldots, n$ ist damit auch $s^{*(\tau)}$ eindeutig bestimmt.

Besitzt A vollen Zeilenrang, dann ist $AA^\top \in \mathbb{R}^{m \times m}$ invertierbar, und aus $A^\top \lambda^{*(\tau)} + s^{*(\tau)} = c$ folgt

$$\lambda^{*(\tau)} = (AA^\top)^{-1} A (c - s^{*(\tau)}).$$

□

Definition 10.6 (Strikt komplementäre Lösung)**.**

Eine Lösung (x^*, λ^*, s^*) der Optimalitätsbedingungen (8.5) heißt **strikt komplementär**, wenn für alle $i = 1, \ldots, n$ entweder $x_i^* = 0$ oder $s_i^* = 0$ gilt.

Satz 10.7 (Konvergenz für $\tau \searrow 0$)**.**

Die strikt zulässige Menge $\mathcal{F}_0$ sei nichtleer, und es gelte $\tau^{(k)} \searrow 0$. Es sei $(x^{(k)}, s^{(k)}, \lambda^{(k)})$ eine Lösung von (10.4) für $\tau = \tau^{(k)}$. Dann ist die Folge $\{(x^{(k)}, s^{(k)})\}$ beschränkt und besitzt daher eine konvergente Teilfolge. Jeder Häufungspunkt (Grenzwert einer Teilfolge) gehört zu einer strikt komplementären Lösung (x^*, λ^*, s^*) von (10.3).[51]

Beweis: Es sei $(x_0, \lambda_0, s_0) \in \mathcal{F}_0$. Es gilt

$$(x^{(k)} - x_0)^\top (s^{(k)} - s_0) = (x^{(k)} - x_0)^\top A^\top (\lambda_0 - \lambda^{(k)}) = (b - b)^\top (\lambda_0 - \lambda^{(k)}) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{x_0^\top}_{>0} s^{(k)} + {x^{(k)}}^\top \underbrace{s_0}_{>0} = \underbrace{{x^{(k)}}^\top s^{(k)}}_{=\tau^{(k)} n} + \underbrace{x_0^\top s_0}_{=:c>0}$$

$$\Rightarrow \quad 0 \le x_0^\top s^{(k)} + {x^{(k)}}^\top s_0 = \tau^{(k)} n + c \le \bar{\tau}\, n + c \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \quad \{\|x^{(k)}\|\} \text{ und } \{\|s^{(k)}\|\} \text{ sind beschränkt.}$$

Also existieren konvergente Teilfolgen

$$x^{(k_\ell)} \to x^* \ge 0, \qquad s^{(k_\ell)} \to s^* \ge 0,$$

und es gilt $Ax^{(k_\ell)} = b$, also auch $Ax^* = b$, sowie ${x^{(k_\ell)}}^\top s^{(k_\ell)} = \tau^{(k_\ell)}\, n \searrow 0$, also auch $(x^*)^\top s^* = 0$.

[51] Nur solche kann man also überhaupt durch primal-duale IP-Verfahren erreichen.

Die Folge $\{\lambda^{(k_\ell)}\}$ erfüllt $A^\top\lambda^{(k_\ell)} = c - s^{(k_\ell)}$, d. h., $c - s^{(k_\ell)} \in$ Bild $(A^\top)$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Da Bild $(A^\top)$ als Unterraum abgeschlossen ist, liegt auch der Grenzwert $c - s^* \in$ Bild $(A^\top)$, d. h., es existiert λ^* mit $A^\top\lambda^* + s^* = c$.[52] Mit anderen Worten: (x^*, λ^*, s^*) erfüllt (8.5).

Zur strikten Komplementarität:

$$(x^{(k_\ell)} - x^*)^\top(s^{(k_\ell)} - s^*) = (x^{(k_\ell)} - x^*)^\top A^\top(\lambda^* - \lambda^{(k_\ell)}) = (b-b)^\top(\lambda^* - \lambda^{(k_\ell)}) = 0$$

$$\Rightarrow \quad (x^*)^\top s^{(k_\ell)} + {x^{(k_\ell)}}^\top s^* = \underbrace{{x^{(k_\ell)}}^\top s^{(k_\ell)}}_{=\tau^{(k_\ell)}n} + \underbrace{(x^*)^\top s^*}_{=0} = \tau^{(k_\ell)}n$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^n \frac{x_i^*}{x_i^{(k_\ell)}} + \sum_{i=1}^n \frac{s_i^*}{s_i^{(k_\ell)}} = n \quad \text{wegen } s_i^{(k_\ell)} = \frac{\tau^{(k_\ell)}}{x_i^{(k_\ell)}} \text{ und } x_i^{(k_\ell)} = \frac{\tau^{(k_\ell)}}{s_i^{(k_\ell)}}.$$

Die $2n$ Quotienten in den Summen sind jeweils entweder $= 0$ oder konvergieren für $\ell \to \infty$ gegen 1. Daraus folgt entweder $x_i^* = 0$ oder $s_i^* = 0$ für alle $i = 1, \dots, n$. □

[52] D. h., λ^* ist nicht notwendig Grenzwert der Folge $\{\lambda^{(k_\ell)}\}$, sondern wird konstruiert.