Grundlagen der Optimierung

Beispiel einer linearen Optimierungsaufgabe

Beispiel 6.1 (Mozartproblem)
Eine Firma stellt Mozartkugeln und Mozarttaler her und benötigt dafür folgende Zutaten:

	Marzipan	Nougat	Bitterschokolade	Verkaufspreis
Mozartkugeln	1	2	1	9
Mozarttaler	1	1	2	8
Lagerbestand	6	11	9	

Frage: Welche Menge an Mozartkugeln und -talern sollte produziert werden, um den Umsatz zu maximieren?
Es sei

$$\begin{aligned} x_1 &= \text{Menge an Mozartkugeln} \\ x_2 &= \text{Menge an Mozarttalern.} \end{aligned}$$

Wir erhalten folgende lineare Optimierungsaufgabe:

$$\left.\begin{aligned} \max \quad & 9\,x_1 + 8\,x_2 \\ \text{sodass} \quad & x_1 + x_2 \le 6 \\ & 2\,x_1 + x_2 \le 11 \\ & x_1 + 2\,x_2 \le 9 \\ \text{und} \quad & x_1 \ge 0 \\ & x_2 \ge 0. \end{aligned}\right\} \tag{6.1}$$

◇

Aus der Modellierung ergibt sich in Beispiel 6.1 folgende typische Gestalt einer linearen Optimierungsaufgabe:

$$\left.\begin{aligned} \max \quad & c^\top x \quad \text{über } x \in \mathbb{R}^n \\ \text{sodass} \quad & Ax \le b \\ \text{und} \quad & x \ge 0. \end{aligned}\right\} \tag{6.2}$$

Dabei sind $c \in \mathbb{R}^n$ (**Kostenvektor**), $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$ mit $m \ge 0$. Die Ungleichungen sind komponentenweise zu verstehen. Ein LP der Gestalt (6.2) heißt in **kanonischer Form**, und x heißt **Variable** des Problems.
In (6.1) ist z. B.

$$c = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

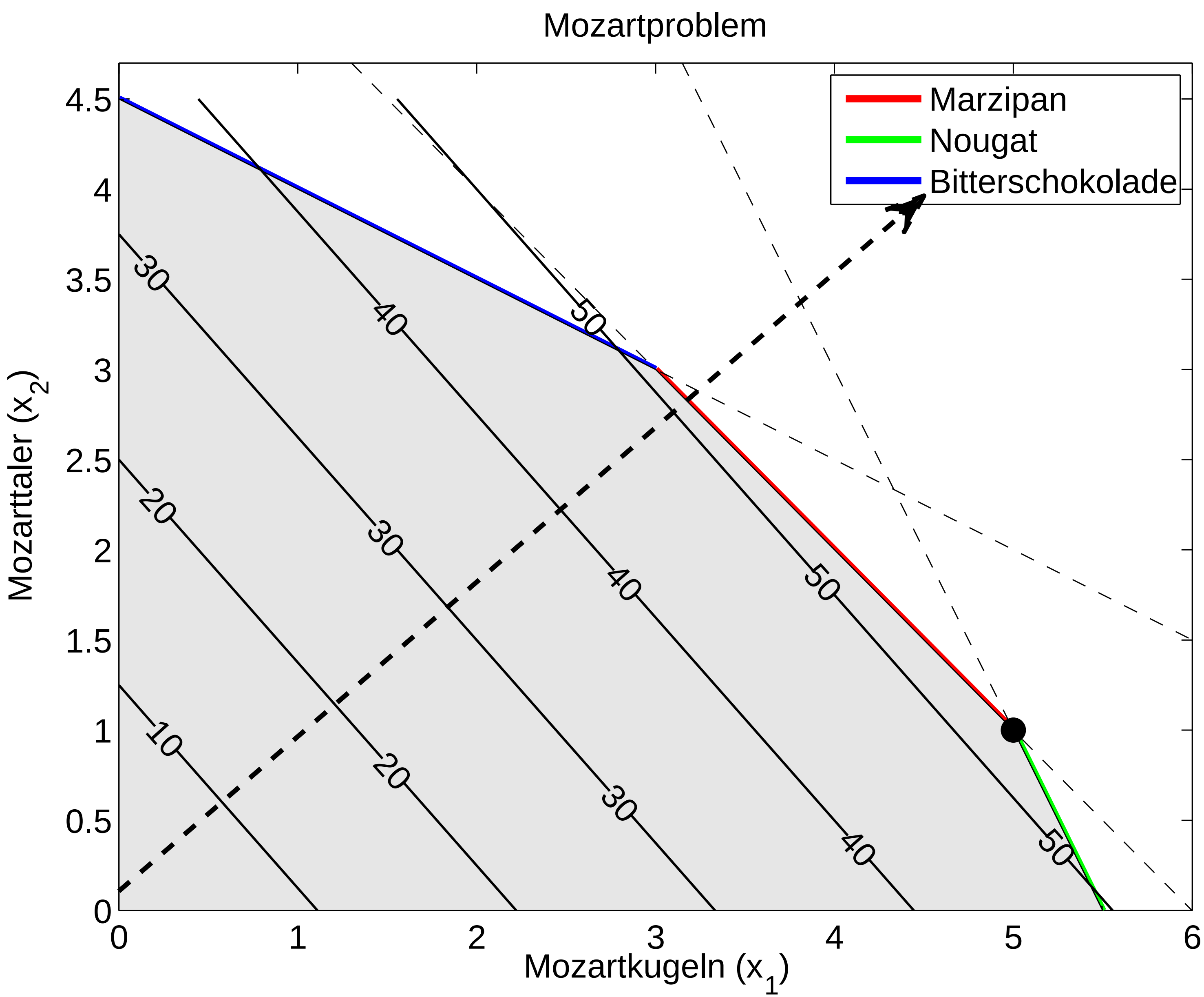

Abbildung 6.1: zulässige Menge (grau), Kostenvektor c, einige Höhenlinien (mit Funktionswerten) der Zielfunktion und optimale Lösung beim Mozartproblem