Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. R. Herzog, M. Winkler

Chemnitz, 2. Februar 2017
Abgabe am 1. März 2017

Grundlagen der Optimierung

Übung 15

Aufgabe 58: Abadie-CQ und Guignard-CQ am Beispiel

Untersuchen Sie bei folgenden Optimierungsaufgaben die Regularitätsbedingungen von Abadie und Guignard im jeweils einzigen zulässigen Punkt:

(a)

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & (x+1)^2 \quad \text{über } x \in \mathbb{R} \\ \text{unter} \quad & x^2 \le 0, \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & (x+1)^2 \quad \text{über } x \in \mathbb{R} \\ \text{unter} \quad & x = 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 59: KKT-Bedingungen für quadratische Optimierungsprobleme

Wir betrachten die folgende quadratische Optimierungsaufgabe mit linearen Gleichungsnebenbedingungen:

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & \frac{1}{2} x^\top Q x + c^\top x \quad \text{über } x \in \mathbb{R}^n \\ \text{sodass} \quad & B\,x = d. \end{aligned}$$

Dabei sei $Q^\top = Q \succ 0$, und die Matrix $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ habe vollen Zeilenrang.

(a) Stelle die KKT-Bedingungen auf und formuliere diese als lineares Gleichungssystem.

(b) Ist der Lagrange-Multiplikator eindeutig bestimmt?

Aufgabe 60: Lagrange-Multiplikatoren für Minimax–Aufgabe

Wir betrachten das Problem:

$$\text{Minimiere} \quad \max\{f_1(x), \dots, f_r(x)\} \quad \text{über } x \in \mathbb{R}^n$$

mit stetig differenzierbaren Funktionen $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, r$.

Es sei x^* ein lokales Minimum. Zeige zunächst über die MFCQ (Definition 17.9), dass Lagrange-Multiplikatoren μ_j^*, $j = 1, \ldots, r$ existieren, so dass (x^*, μ^*) das zugehörige KKT-System erfüllen. Folgere daraus die notwendigen Bedingungen

$$\sum_{j=1}^{r} \mu_j^* \nabla f_j(x^*) = 0, \qquad \mu^* \geq 0, \qquad \sum_{j=1}^{r} \mu_j^* = 1$$

$$\text{und} \quad \mu_j^* = 0, \quad \text{für } j \text{ mit } f_j(x^*) < \max\{f_1(x^*), \ldots, f_r(x^*)\}.$$

Hinweis: Betrachte das äquivalente Problem (die sogenannte Epigraph-Formulierung):

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & t && \text{über } (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \\ \text{sodass} \quad & f_j(x) \leq t, && j = 1, \ldots, r. \end{aligned}$$

Aufgabe 61: Beispiele für Guignard-CQ $\not\Rightarrow$ Abadie-CQ $\not\Rightarrow$ MFCQ $\not\Rightarrow$ LICQ

(a) Zeige, dass für das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{sodass} \quad & x_1 \cdot x_2 = 0 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

im Nullpunkt $x^* = (0,0)$ die Guignard-CQ, aber nicht die Abadie-CQ erfüllt ist.

(b) Gegeben seien die Funktionen $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$c(y) := \begin{cases} (y+1)^2, & y < -1, \\ 0, & -1 \leq y \leq 1, \\ (y-1)^2, & y > 1, \end{cases}$$

$g_1, g_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g_1(x) := c(x_1) - x_2$, $g_2(x) := c(x_1) + x_2$. Weiter sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine beliebige konvexe und stetig differenzierbare Funktion. Zeige, dass das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{sodass} \quad & g_1(x) \leq 0 \\ & g_2(x) \leq 0 \end{aligned}$$

ein konvexes Problem ist. Welche constraint qualifications aus Definition 16.5, 17.9 und 17.13 sind im Punkt $x^* = (0,0)$ erfüllt?

(c) Zeige, dass für das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1^2 + (x_2+1)^2 \\ \text{sodass} \quad & -x_1^3 - x_2 \leq 0 \\ & -x_2 \leq 0 \end{aligned}$$

im Nullpunkt $x^* = (0,0)$ die Bedingung MFCQ erfüllt ist, aber LICQ nicht erfüllt ist.

Aufgabe 62: MFCQ ist äquivalent zur Kompaktheit der Menge der Lagrange-Multiplikatoren

(a) Es sei x_0 ein zulässiger Punkt für das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & f(x) \qquad \text{über } x \in \mathbb{R}^n \\ \text{sodass} \quad & g(x) \leq 0 \\ & h(x) = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

mit stetig differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$.

Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

(a) x_0 erfüllt die MFCQ

(b) das System

$$\sum_{i \in \mathcal{A}(x_0)} \mu_i \nabla g_i(x_0) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \nabla h_j(x_0) = 0 \quad \text{mit } \mu_i \geq 0 \; \forall i \in \mathcal{A}(x_0)$$

hat nur die triviale Lösung $(\mu, \lambda) = 0$.

Hinweis: Nutze Hausaufgabe 37.

(b) Es sei (x^*, λ^*, μ^*) ein KKT-Punkt von (1). Zeige die Äquivalenz von

(a) MFCQ gilt in x^*.

(b) Die Menge der zu x^* gehörenden Lagrange-Multiplikatoren $(\mu^*, \lambda^*) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ ist kompakt.

Hausaufgabe 36: Grafisches Lösen, KKT-Bedingungen und `fmincon`

(a) Löse das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) := (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 \\ \text{sodass} \quad & g_1(x) := x_1^2 - x_2 \qquad \leq 0 \\ & g_2(x) := x_1 + x_2 - 2 \quad \leq 0 \end{aligned}$$

grafisch. Zeichne dazu die Niveaulinien von f und die zulässige Menge und markiere darin die optimale Lösung.

(b) Gilt LICQ in der Lösung? Bestimme die zugehörigen Lagrange-Multiplikatoren.

(c) **Zusatz:** Verwende den Befehl `fmincon` aus der Optimization-Toolbox von `Matlab`, um das Optimierungsproblem zu lösen. Lasse dir dabei auch die Lagrange-Multiplikatoren ausgeben.

Hausaufgabe 37: Ein weiterer Alternativsatz

Seien $A \in \mathbb{R}^{q \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$ zwei Matrizen mit $\operatorname{rank}(B) = p$. Zeige, dass dann entweder das System

$$Ad < 0, \quad Bd = 0$$

lösbar ist oder dass das System

$$A^\top \mu + B^\top \lambda = 0$$

eine Lösung $(\mu, \lambda) \neq 0$ mit $\mu \geq 0$ hat.
Hinweis: Farkas-Lemma 16.7

Hausaufgabe 38: Umformulierung von Ungleichungsnebenbedingungen mit Hilfe von Slacks

Wir betrachten das Problem

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & f(x) \quad \text{über } x \in \mathbb{R}^n \\ \text{sodass} \quad & g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m \end{aligned} \tag{2}$$

und das dazu äquivalente Problem

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & f(x) \quad \text{über } (x, s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \\ \text{sodass} \quad & g_i(x) + s_i = 0, \quad i = 1, \ldots, m \\ \text{und} \quad & s \geq 0. \end{aligned} \tag{3}$$

(a) Gib die KKT-Bedingungen für beide Probleme an und zeige, dass sie zueinander äquivalent sind.

(b) Es sei $x \in \mathbb{R}^n$ mit $g_i(x) \leq 0$ für $i = 1, \ldots, m$ und $s_i = -g_i(x)$ für $i = 1, \ldots, m$. Zeige, dass für Problem (2) MFCQ bzw. LICQ im Punkt x genau dann erfüllt ist, wenn MFCQ bzw. LICQ für das Problem (3) im Punkt (x, s) erfüllt ist.