Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. R. Herzog, M. Winkler

Chemnitz, 26. Januar 2017
Abgabe am 31. Januar 2017

Grundlagen der Optimierung

Übung 14

Aufgabe 53: Eigenschaften des Kegels der zulässigen Richtungen

Beweise Lemma 14.8 aus der Vorlesung.

Aufgabe 54: Grafische Darstellung von $K_M(x)$ und $\mathcal{N}_M(x)$

Stellen Sie die Kegel der zulässigen Richtungen $K_M(x)$ und die Normalenkegel $\mathcal{N}_M(x)$ für folgende Mengen dar:

(a) $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ im Punkt $x = (1, -1)^\top$,

(b) $M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x^3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \right\}$
in den Punkten $x_1 = (0, 0)^\top$ und $x_2 = (-1, -1)^\top$,

(c) $M = \left\{ z \in \mathbb{R}^2 : \|z\|_2^2 = 1 \right\} \cup \left\{ z \in \mathbb{R}^2 : \|z - (1, 0)^\top\|_2^2 = 1 \right\}$
im Punkt $x = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3} \right)^\top$.

Aufgabe 55: $\mathcal{T}_X(x_0)$ und $\mathcal{T}_X^{\text{lin}}(x_0)$ an einem Beispiel

In den folgenden zwei Teilaufgaben wird jeweils eine zulässige Menge X durch $X = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 0\}$ beschrieben. Gib jeweils für den gegebenen Punkt x_0 die Menge der aktiven Indizes $\mathcal{A}(x_0)$, den Tangentialkegel $\mathcal{T}_X(x_0)$ und den linearisierten Tangentialkegel $\mathcal{T}_X^{\text{lin}}(x_0)$ an. Fertige je eine Skizze an.

(a)

$$g(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 1 \\ 1 - x_1 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad x_0 = (1,\, 0)^\top$$

(b)

$$g(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 1 \\ 1 - x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad x_0 = (1,\, 0)^\top$$

Aufgabe 56: Optimalitätsbedingungen der konvexen Optimierung auf LPs angewandt

(a) Gegeben sei für $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ das Polyeder $\mathcal{P}$ in Normalform

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n : A\,x = b,\ x \geq 0\}.$$

Zeige, dass für den Normalenkegel in $x \in \mathcal{P}$ gilt:

$$\mathcal{N}_{\mathcal{P}}(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \exists \lambda \in \mathbb{R}^m, s \in \mathbb{R}^n : -y = A^\top \lambda + s,\ s \geq 0,\ s^\top x = 0\}.$$

Hinweis: Benutze Lemma 16.7 (Farkas-Lemma).

(b) Leite damit aus Folgerung 15.2 die Äquivalenz von (a) und (c) in Satz 8.5 (Notwendige und hinreichende Optimalitätsbedingungen der linearen Optimierung) her.

(c) Berechne den Normalenkegel zu

$$\tilde{\mathcal{P}} = \{x \in \mathbb{R}^n : A\,x = b,\ x > 0\}.$$

in einem Punkt $x \in \tilde{\mathcal{P}}$.

Aufgabe 57:

Zeige zuerst, dass für K_1, K_2 konvexe Kegel mit $K_1 \subseteq K_2$ stets $K_1^\circ \supseteq K_2^\circ$ gilt und dann, dass für zwei nichtleere, abgeschlossene, konvexe Mengen C_1 und C_2 mit $x \in C_1 \cap C_2$ immer $T_{C_1\cap C_2}(x) \subseteq T_{C_1}(x) \cap T_{C_2}(x)$ und $N_{C_1\cap C_2}(x) \supseteq \operatorname{conv}(N_{C_1}(x) \cup N_{C_2}(x)) = N_{C_1}(x) + N_{C_2}(x)$. Gib ein Beispiel für C_1 und C_2 an, wo Gleichheit nicht erfüllt ist.

Hausaufgabe 33: Eigenschaften des Normalenkegels

Beweise Lemma 14.13 aus der Vorlesung.

Hinweis: Zeige dazu in Teil a), dass die Beziehungen $\mathcal{N}_M(x) = K_M(x)^\circ$ und $(M - x)^\circ = K_M(x)^\circ$ erfüllt sind. Daraus folgt automatisch $\mathcal{N}_M(x) = (M - x)^\circ$. Außerdem könnte Lemma 14.11 in Teil b) hilfreich sein.

Hausaufgabe 34: $\mathcal{T}_X(x_0)$ und $\mathcal{T}_X^{\text{lin}}(x_0)$ am Beispiel

In den Teilaufgaben (a) und (b) wird jeweils eine zulässige Menge X durch $X = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 0 \text{ und } h(x) = 0\}$ beschrieben. Gib jeweils für den gegebenen Punkt x_0 die Menge der aktiven Indizes $\mathcal{A}(x_0)$, den Tangentialkegel $\mathcal{T}_X(x_0)$, den linearisierten Tangentialkegel $\mathcal{T}_X^{\text{lin}}(x_0)$ und den Normalenkegel $\mathcal{N}_X(x_0)$ an. Fertige je eine Skizze an.

(a)

$$g(x) = \begin{pmatrix} (x_1-1)^2 + x_2^2 - 1 \\ (x_1-3)^2 + x_2^2 - 1 \\ x_3 + 1 \\ -x_3 - 2 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad x_0 = (2,\ 0,\ -1)^\top$$

(b) Verifiziere, dass der lineariserte Tangentialkegel von der *Beschreibung* der zulässigen Menge X abhängt (Bemerkung 16.3 (c)). Benutze dazu die folgenden beiden Darstellungen derselben Menge $X \subset \mathbb{R}^2$ und betrachte den Punkt $x_0 = (-1, 0)^\top$.

i)
$$g(x) = \begin{pmatrix} -x_1 - 1 \\ x_1 - 1 \end{pmatrix}, \qquad h(x) = x_2$$

ii)
$$g(x) = \begin{pmatrix} x_2 - (x_1 + 1)^3 \\ x_1 - 1 \end{pmatrix}, \qquad h(x) = x_2$$

Hausaufgabe 35: $\mathcal{T}_X^{\text{lin}}(x_0) = \mathcal{T}_{X_{\text{lin}}(x_0)}(x_0)$

Beweise Bemerkung 16.3 (a). Folgere daraus, dass für lineare Programme

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & c^\top x \quad \text{über } x \in \mathbb{R}^n \\ \text{sodass} \quad & Ax = b \\ \text{und} \quad & x \geq 0 \end{aligned}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ und $c \in \mathbb{R}^n$ die Abadie-CQ (d.h. $\mathcal{T}_X(x_0) = \mathcal{T}_X^{\text{lin}}(x_0)$) in jedem zulässigen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ erfüllt ist.