Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. R. Herzog, M. Winkler

Chemnitz, 12. Januar 2018
Abgabe am 17. Januar 2018

Grundlagen der Optimierung

Übung 12

Aufgabe 46: Menge aller Minoranten am Beispiel

Sei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ (x-1)^2 - 1, & x < 0. \end{cases}$$

Skizziere die Funktion f und beschreibe jeweils die Menge aller linearen Minoranten, die f in den Punkten $x_0 = 0$ beziehungsweise $x_0 = 1$ stützen.

Aufgabe 47: Kettenregel für das Subdifferential

Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ konvex, und $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $h(x) = f(A\,x + b)$. Wegen Satz 11.12 (b) ist h konvex. Zeige eine Kettenregel für das Subdifferential, d.h. beweise, dass die Beziehung

$$\partial h(x) = A^\top \partial f(A\,x + b)$$

gilt.

Aufgabe 48: Das Subdifferential einer konvexen Funktion ist ein monotoner Operator

(a) Zeige das Analogon zu Satz 11.13 (a) (iii): Sei $C \subset \mathbb{R}^n$ konvex und $f : C \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion sowie $x_1, x_2 \in C$, dann gilt:

$$(s_1 - s_2)^\top (x_1 - x_2) \geq 0$$

für alle $s_i \in \partial f(x_i)$, $i = 1, 2$. Das heißt, das Subdifferential ist ein (mengenwertiger) monotoner Operator.

(b) Wie ändert sich die Aussage, falls f sogar strikt konvex ist? Folgere daraus für $x_1, x_2 \in \operatorname{int}(C)$ die Beziehung

$$\partial f(x_1) \cap \partial f(x_2) \neq \emptyset \Longleftrightarrow x_1 = x_2.$$

Hausaufgabe 28: Subdifferentiale von Normen

(a) Es sei $p \in [1, \infty]$ und

$$f(x) = \|x\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} & \text{falls } p \in [1, \infty), \\ \max_{i=1,\ldots,n} |x_i| & \text{falls } p = \infty \end{cases}$$

die zugehörige p-Norm. Weiter bezeichne q den zu p konjugierten Exponenten, d. h. $1/p + 1/q = 1$ (bzw. $q = \infty$ für $p = 1$ und $q = 1$ für $p = \infty$). Zeige, dass das Subdifferential der p-Norm von den normerzeugenden Elementen der q-Norm-Einheitskugel erzeugt wird, d. h. es gilt

$$\partial f(x_0) = \{ s \in B_1^{\|\cdot\|_q}(0) \ : \ x_0^\top s = \|x_0\|_p \ \}.$$

(b) Vergewissern Sie sich mit Hilfe von Teil (a), dass die folgenden Darstellungen der Subdifferentiale korrekt sind.

(a) Es sei $f(x) = \|x\|_1$. Dann gilt:

$$s \in \partial f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \text{für alle } i = 1, \ldots, n \text{ gilt } s_i \in \begin{cases} \{-1\} & \text{falls } x_i < 0, \\ [-1, 1] & \text{falls } x_i = 0, \\ \{1\} & \text{falls } x_i > 0. \end{cases}$$

(b) Es sei $f(x) = \|x\|_2$. Dann gilt:

$$\partial f(x) = \begin{cases} \{ \frac{x}{\|x\|_2} \}, & \text{falls } x \neq 0, \\ \{ s \in \mathbb{R}^n : \|s\|_2 \leq 1 \}, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

(c) Es sei $f(x) = \|x\|_\infty$. Dann gilt für $x \neq 0$

$$\begin{aligned} \partial f(x) = \{ s \in \mathbb{R}^n : \|s\|_1 \leq 1, \ & \operatorname{sgn} s_i = \operatorname{sgn} x_i \ \text{ für } i \text{ mit } |x_i| = \|x\|_\infty \\ \text{und} \quad & s_i = 0 \qquad \text{ für } i \text{ mit } |x_i| < \|x\|_\infty \}, \end{aligned}$$

sowie

$$\partial f(0) = \{ s \in \mathbb{R}^n : \|s\|_1 \leq 1 \}.$$

Hausaufgabe 29: Subdifferential einer konvexen differenzierbaren Funktion

Beweise Satz 13.13 aus der Vorlesung.
Hinweis: Verwende dazu Satz 13.11.