Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. R. Herzog, M. Winkler

Chemnitz, 22. Dezember 2017
Abgabe am 10. Januar 2018

Grundlagen der Optimierung

Übung 11

Aufgabe 40: Operationen auf konvexen Funktionen

Beweise Satz 11.12 aus der Vorlesung.

Aufgabe 41: Beispiele für konvexe Optimierungsprobleme

Es seien $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex ($i = 1, \ldots, m$) und $h_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ affin-linear ($j = 1, \ldots, p$) gegeben und

$$C := \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, g_i(x) \le 0 \ (i = 1, \ldots, m),\ h_j(x) = 0 \ (j = 1, \ldots, p)\}\,.$$

Zeige, dass C eine konvexe Menge ist und folgere, dass jedes lineare Optimierungsproblem (in kanonischer Form und in Standardform) ein konvexes Optimierungsproblem ist.

Aufgabe 42: Strikt trennende Hyperebene am Beispiel

Finde eine strikt trennende Hyperebene für die beiden folgenden Mengen:

$$C_1 := \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\|_2 \le 1\}, \quad C_2 := (0,1,2)^\top + \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\|_1 \le 1\},$$

mit $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + |x_3|$ und der euklidischen Norm $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^3 x_i^2\right)^{1/2}$.

Aufgabe 43: Jede abgeschlossene, konvexe Menge lässt sich als Schnitt von abgeschlossenen Halbräumen darstellen

Zeige, dass für jede abgeschlossene, konvexe Menge $C \subset \mathbb{R}^n$

$$C = \bigcap \{H \subset \mathbb{R}^n \,:\, H \text{ abgeschlossener Halbraum mit } C \subset H\}$$

gilt.

Hinweis: Nutze den strikten Trennungssatz 12.8.

Aufgabe 44: Die Konvexität von C ist eine notwendige Bedingung in Lemma 12.4

Finde jeweils ein Beispiel einer nichtkonvexen Menge M, sodass

(a) $\operatorname{int}(M) \neq \operatorname{int}(\overline{M})$

(b) $\partial M \neq \partial \overline{M}$

Aufgabe 45: Beschränktheit von C_2 ist notwendig in Lemma 12.7

Finde zwei abgeschlossene, konvexe Mengen C_1 und C_2, sodass $C_1 + C_2$ nicht abgeschlossen ist.

Hausaufgabe 26: Beweis von Lemma 13.6

Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ und $x_0 \in \operatorname{int}(M)$, d. h. $B_\varepsilon(x_0) \subset M$ für ein hinreichend kleines $\varepsilon > 0$. Zeige folgende Aussagen:

(a) Die Vektoren $\{v_0, \dots, v_n\} \in M$ mit

$$v_0 := x_0 - \frac{\varepsilon}{n+1}\, e \qquad \text{und} \qquad v_i := x_0 + \varepsilon \left(e_i - \frac{1}{n+1}\, e \right)$$

sind affin unabhängig, d.h. die Vektoren $\{v_1 - v_0, \dots, v_n - v_0\}$ sind linear unabhängig. Dabei ist $e = (1, \dots, 1)^\top$ und e_i der i-te Einheitsvektor des $\mathbb{R}^n$. Fertige zunächst eine Skizze für den Fall $n = 2$ an. Schließe daraus Folgerung 19.25 (a) und skizziere die Situation für $n = 2$.

(b) Jeder Vektor $z \in \mathbb{R}^n$ lässt sich eindeutig in der Form

$$z = \sum_{i=0}^{n} \beta_i v_i \qquad \text{mit} \qquad \sum_{i=0}^{n} \beta_i = 0$$

schreiben. Dabei ist β durch

$$\beta_0 = -\frac{1}{\varepsilon}\, e^\top z \qquad \text{und} \qquad \beta_i = \frac{1}{\varepsilon}\, z_i \qquad i = 1, \dots, n$$

gegeben. (Insbesondere hängen die β_i linear und stetig von z ab.)

(c) Zeige, dass x_0 der Schwerpunkt von $\Delta := \operatorname{conv}(\{v_0, \dots, v_n\})$ ist, das heißt, $x_0 = (n+1)^{-1} \sum_{i=0}^{n} v_i$. Folgere daraus die Eigenschaft $B_{\varepsilon'}(x_0) \subset \Delta$ mit $\varepsilon' := \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}(n+1)}$ (oder äquivalent: $x_0 + z \in \Delta$ für alle $z \in B_{\varepsilon'}(0)$). Folgere anschließend Lemma 13.6.

Hausaufgabe 27: Nicht-Expansivität von Projektionen auf konvexe Mengen

Sei $C \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, eine konvexe Menge.

(a) Zeige: Die orthogonale Projektion $\mathrm{proj}_C \colon \mathbb{R}^n \to C$ ist nicht-expansiv, das heißt, die Abschätzung

$$\|\mathrm{proj}_C(x) - \mathrm{proj}_C(y)\| \leq \|x - y\|$$

ist für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ erfüllt.

(b) Konstruiere je ein Beispiel, für das

(i) der Gleichheitsfall in obiger Abschätzung erfüllt ist,

(ii) die linke Seite der Abschätzung 0 ergibt.