Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. R. Herzog, M. Winkler

Chemnitz, 8. Dezember 2017
Abgabe am 13. Dezember 2017

Grundlagen der Optimierung

Übung 9

Aufgabe 31: Duales LP für verschiedene Beispiele

(a) Zeige, dass sich das duale vom dualen eines LP in Normalform wieder als das primale Problem auffassen lässt.

(b) Zeige, dass sich die rechten linearen Programme jeweils als das duale der linken linearen Programme auffassen lassen.

(a)

$$\begin{array}{lllll} \max & c^\top x & \qquad & \min & b^\top \lambda \\ \text{sodass} & Ax \le b & & \text{sodass} & A^\top \lambda \ge c \\ & x \ge 0 & & & \lambda \ge 0 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{lllll} \min & c^\top x & \qquad & \max & b^\top \lambda \\ \text{sodass} & Ax \ge b & & \text{sodass} & A^\top \lambda = c \\ & x \text{ frei} & & & \lambda \ge 0 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{lllll} \max & c^\top x & \qquad & \min & (A\ell - b)^\top \lambda_1 + (u - \ell)^\top \lambda_2 + c^\top \ell \\ \text{sodass} & Ax = b & & \text{sodass} & A^\top \lambda_1 - \lambda_2 \le -c \\ & \ell \le x \le u & & & \lambda_1 \text{ frei}, \ \lambda_2 \ge 0 \end{array}$$

Hinweis: Überführe zunächst in Normalform.

Aufgabe 32: Beispiele für LPs mit (un-)zulässigen und (un-)beschränkten primalen/dualen Problemen

(a) Gib ein lineares Programm an, bei dem sowohl das primale als auch das duale Problem unzulässig ist (vgl. Satz 8.7, Fall (II)).

(b) Gib ein lineares Programm an, bei dem das primale zulässig und unbeschränkt ist und das zugehörige duale Problem unzulässig ist (vgl. Satz 8.7, Fall (III)).

Aufgabe 33: Gemischte Erweiterung eines Matrixspiels

Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine (Gewinn-)matrix. Die Spieler P_1 und P_2 spielen folgendes Spiel: P_1 würfelt eine Spalte von A aus, d.h. eine Zahl $j \in \{1,\dots,n\}$, und P_2 würfelt eine Zeile $i \in \{1,\dots,m\}$. Dann zahlt P_2 an P_1 den Wert a_{ij}. (Falls $a_{ij} < 0$, so zahlt P_1 an P_2 den Wert $-a_{ij}$.) Beide Spieler können vorher (geheim, d.h. unabhängig voneinander) die Wahrscheinlichkeitsverteilung festlegen, mit der gewürfelt wird. P_1 wählt ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x \geq 0$, $\sum_{j=1}^n x_j = 1$ und würfelt im Spiel die Spalte j mit Wahrscheinlichkeit x_j. Analog wählt P_2 ein $y \in \mathbb{R}^m$ mit $y \geq 0$, $\sum_{i=1}^m y_i = 1$.

(a) Angenommen, P_1 kennt durch einen Spion die Wahrscheinlichkeitsverteilung $\bar{y} \in \mathbb{R}^m$, $\bar{y} \geq 0$, $\sum_{i=1}^m \bar{y}_i = 1$, mit der P_2 die Zeilen auswählen wird. Zeige, dass P_1 den Erwartungswert seines Gewinns maximiert, wenn er eine optimale Lösung des linearen Programms

$$\begin{array}{ll} \max & \bar{y}^\top Ax \quad \text{über } x \in \mathbb{R}^n \\ \text{sodass} & e^\top x = 1 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

als seine Wahrscheinlichkeitsverteilung zur Spaltenwahl nutzt. Dabei sei $e := (1,\dots,1)^\top$. Wie sieht die Menge der Optimallösungen dieser Aufgabe aus?

(b) Der Spion hat die Seiten gewechselt und steht nun P_2 zur Verfügung. Zeige, dass unter diesen Umständen P_1 den Erwartungswert seines Gewinns maximiert, wenn er den x-Anteil einer optimalen Lösung des linearen Programms

$$\begin{array}{ll} \max & v \quad \text{über } x \in \mathbb{R}^n,\ v \in \mathbb{R} \\ \text{sodass} & v \leq e_i^\top Ax, \quad i = 1,\dots,m \\ & e^\top x = 1 \\ & x \geq 0,\ v \text{ frei} \end{array}$$

als Wahrscheinlichkeitsverteilung zur Spaltenwahl nutzt. Dabei sei e_i der i-te Einheitsvektor.

(c) Kann P_1 den erwarteten Gewinn aus (b) verbessern, wenn er P_2 den Spion wieder abwirbt? Zeige, dass dies nicht der Fall ist, wenn P_2 für seine Wahrscheinlichkeitsverteilung ein zu (b) analoges lineares Programm löst. (Tipp: starke Dualität)

Hausaufgabe 21: Selbstduale LPs

Wir betrachten das lineare Problem

$$\begin{array}{rl} \min & c^\top x \\ \text{sodass} & Ax \leq b \\ \text{und} & x \geq 0 \end{array}$$

(a) Zeige, dass das Problem selbstdual ist, falls $A = -A^\top$ und $b = c$ gilt.

(b) Zeige, dass der Optimalwert eines solchen LPs Null ist, falls das Problem überhaupt einen zulässigen Punkt besitzt.

Hausaufgabe 22: Finden eines zulässigen Punktes und Lösen ist gleich schwer

Betrachte die folgenden beiden Probleme

(a) Finde zu einem LP einen zulässigen Punkt oder stelle die Unzulässigkeit fest.

(b) Finde zu einem LP eine Lösung oder stelle fest, dass es keine Lösung gibt.

Zeige, dass beide Probleme gleich schwer sind, das heißt, kennt man einen beliebigen Algorithmus, der eines der Probleme löst, kann man auch das andere damit lösen.