Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. R. Herzog, M. Winkler

Chemnitz, 1. Dezember 2017
Abgabe am 6. Dezember 2017

Grundlagen der Optimierung

Übung 8

Aufgabe 28: Phase I Bestimmung am Beispiel

Betrachte das folgende lineare Optimierungsproblem

$$
\begin{array}{rrcl}
\min & x_1 + x_2 + 2\,x_3 & & \\
\text{sodass} & 2\,x_1 + x_2 - x_3 & = & 1 \\
& x_1 - x_2 + 4\,x_3 & = & 2 \\
& 3\,x_1 + x_2 + 2\,x_3 & \le & 5 \\
& 2\,x_1 - x_2 + x_3 & \le & 1 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3 & \ge & 0.
\end{array}
$$

Formuliere mit Hilfe von Satz 7.10 ein geeignetes Phase-I-Problem.

Aufgabe 29: Tausch von Basis-Indizes nach Phase I

Betrachtet werde zu dem linearen Programm (6.3) in Normalform das LP-Hilfsproblem (7.3)

$$
\begin{array}{rl}
\min & e^\top z \quad \text{über } (x,z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \\
\text{sodass} & Ax + z = b \\
\text{und} & x \ge 0, \quad z \ge 0
\end{array}
$$

mit $e = (1, 1, \ldots, 1)^\top \in \mathbb{R}^m$ und $b \ge 0$. Sei $(x^*, z^*)^\top$ eine entartete Basislösung zur Basis B^* mit der Eigenschaft $z^* = 0$. Unter der Voraussetzung $\operatorname{rang}(A) = m$ ist der Vektor x^* nach Satz 7.10 ein Basisvektor für (6.3). Die mit dem Simplex-Verfahren berechnete Basis B^* kann jedoch Indizes $i > n$ enthalten, vgl. Bemerkung 7.11 (b). Die folgende Aussage zeigt, wie man solche für Phase II unbraucharen Indizes gegen Indizes aus $\{1, \ldots, n\}$ austauschen kann.
Es bezeichne $[A, I_m]_{B^*}$ die Matrix mit den zu B^* gehörenden Spalten von $[A, I_m]$ (es sei also insbesondere a_{n+j} der j-te Einheitsvektor, falls $n+j \in B^*$ und $j \ge 1$). Sei nun $s \in \{n+1, \ldots, n+m\} \cap B^*$. Man zeige:

(a) Sei $r \in \{1, \ldots, n\} \setminus B^*$ ein Index mit der Eigenschaft, dass für $d = (d_i)_{i \in B^*}$ mit

$$[A, I_m]_{B^*} d = a_r$$

gilt $d_s \neq 0$. Dann ist $(x^*, z^*)^\top$ auch ein Basisvektor zur Indexmenge $B^+ := (B^* \cup \{r\}) \setminus \{s\}$.

(b) Zeige, dass solch ein r existiert, falls A vollen Rang hat.

Aufgabe 30: Simplex-Verfahren in 3D

Betrachte das lineare Optimierungsproblem

$$\begin{array}{rrcl} \max & x_1 + x_2 - 2\,x_3 & & \\ \text{sodass} & x_1 + x_2 + x_3 & = & 2 \\ & x_2 & \leq & 1 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 & \geq & 0. \end{array}$$

(a) Löse das Problem grafisch.

(b) Forme das Optimierungsproblem in ein LP in Normalform um.

(c) Berechne alle Basisvektoren (mit zugehöriger Basis- und Nichtbasismatrix) und identifiziere diese in der Skizze aus (a). Welche der Basisvektoren sind zulässig?

(d) Löse das Programm „von Hand“ mit dem Simplex-Algorithmus (Algorithmus 7.6) Starte mit dem zu $(x_1, x_2) = (1, 1)$ gehörenden Basisvektor.

Hausaufgabe 19: Implementierung von Phase I

Implementiere „Phase I“ für ein lineares Programm in Normalform in `Matlab`. Erstelle dazu eine Datei `simplex_phaseI.m` und verwende

```
function [x,basis] = simplex_phaseI(A,b,c,pricing)
```

als erste Zeile. Dabei sind `A,b,c` die Daten des linearen Programms

$$\begin{array}{rl} \min & c^\top x \\ \text{sodass} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

und `pricing` gibt die Auswahlstrategie an. Rückgabewerte sind ein für Phase II zulässiger Basisvektor `x` und die zugehörige Basis `basis`. Auch der Fall, dass kein zulässiger Punkt existiert, ist abzufangen. Teste den Algorithmus an dem in Übung 7, Aufgabe 26 angegebenen Beispiel.

Hinweis: Verwende zur Lösung des Hilfsproblems die Implementierung des Simplex-Algorithmus aus Aufgabe Übung 7, Hausaufgabe 18. Falls diese Aufgabe nicht gelöst wurde kann auch die MATLAB-Funktion `linprog` bzw. die Octave-Funktion `glpk` verwendet werden.

Abgabe: Schicke die erzeugten m-Files `simplex_phaseI.m` und `test_phaseI.m` an `max.winkler@mathematik.tu-chemnitz.de` (Betreff: HA Grundlagen der Optimierung Übung 8).

Hausaufgabe 20: Würfel von Klee-Minty

Wir betrachten das lineare Problem

$$
\begin{array}{rlllllllllll}
\max & 2^{n-1}x_1 + 2^{n-2}x_2 + \ldots + 2x_{n-1} + x_n \\
\text{sodass} & x_1 & & & & & & & & & \leq & 5 \\
& 4x_1 & + & x_2 & & & & & & & \leq & 25 \\
& 8x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & & & & & \leq & 125 \\
& \vdots & & & & & & & & & & \vdots \\
& 2^n x_1 & + & 2^{n-1}x_2 & + & \ldots & + & 4x_{n-1} & + & x_n & \leq & 5^n \\
\text{und} & x \geq 0.
\end{array}
$$

Löse das Problem für verschiedene n mit dem Simplex-Algorithmus in MATLAB. Verwende dabei die Indizes der eingeführten Schlupfvariablen als Startbasis und *negativste reduzierte Kosten* als Auswahlstrategie. Wie hängen die vom Simplex-Algorithmus benötigten Iterationen mit n zusammen?

Hinweis: Verwende zur Lösung des Hilfsproblems die Implementierung des Simplex-Algorithmus aus Aufgabe Übung 7, Hausaufgabe 18. Falls diese Aufgabe nicht gelöst wurde kann auch die MATLAB-Funktion `linprog` bzw. die Octave-Funktion `glpk` verwendet werden. Diese Funktionen verwenden allerdings ein primal-duales Simplex-Verfahren, welches bei diesem Problem deutlich weniger Iterationen benötigt um eine Lösung zu finden.

Abgabe: Schicke das erzeugte `m`-File `klee_minty.m` an `max.winkler@mathematik.tu-chemnitz.de` (Betreff: HA Grundlagen der Optimierung Übung 8).