Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. R. Herzog, M. Winkler

Chemnitz, 24. November 2017
Abgabe am 29. November 2017

Grundlagen der Optimierung

Übung 7

Aufgabe 25: Basisvektoren eines LPs bestimmen

Gegeben sei das Polyeder in Normalform $P = \{x \in \mathbb{R}^7 \mid Ax = b, x \geq 0\}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Vektoren sind (zulässige) Basisvektoren des Polyeders P?

(a) $x = (2, 1, 3, -2, 0, 0, 0)^\top$

(b) $x = (1, 0, 3, 0, 1, 0, 0)^\top$

(c) $x = (1, 0, 3, 0, 3, 1, 0)^\top$

(d) $x = (2, 2, 0, 0, 0, 0, 3)^\top$

(e) $x = (2, 1, 1, 0, 2, 0, 2)^\top$

Aufgabe 26: Simplex-Verfahren zum Lösen eines LPs

Betrachten Sie das folgende lineare Optimierungsproblem

$$\begin{array}{rrcl} \min & 3\,x_1 + x_2 & & \\ \text{sodass} & x_1 - x_2 & \leq & 3 \\ & x_1 - 3x_2 & \leq & 1 \\ & x_1,\ x_2 & \geq & 0. \end{array}$$

(a) Formen Sie das Optimierungsproblem in ein LP in Normalform um.

(b) Lösen Sie das Programm „von Hand" mit dem Simplex-Algorithmus. Starten Sie mit dem zu $(x_1, x_2) = (4, 1)$ gehörenden Basisvektor.
Hinweis: Sollten Sie damit Probleme haben, versuchen Sie das Problem grafisch zu lösen und geben Sie zwei zulässige Basisvektoren an.

Aufgabe 27: Beweis von Satz 6.13

Beweise Satz 6.13 aus der Vorlesung.

Hausaufgabe 17: Jeder zulässige Basisvektor kann optimal sein

Es sei x ein zulässiger Basisvektor zur Basis B des durch $x \in \mathbb{R}^n$, $Ax = b$, $x \geq 0$ ($A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$) beschriebenen Polyeders. Zeige, dass ein Kostenvektor $c \in \mathbb{R}^n$ existiert, sodass x die einzige Optimallösung von

$$\begin{aligned} \min \quad & c^\top x \\ \text{sodass} \quad & Ax = b \\ \text{und} \quad & x \geq 0 \end{aligned}$$

ist. Das heißt, jeder zulässige Basisvektor kann optimal sein.

Hausaufgabe 18: Implementierung des Simplex-Algorithmus

Implementiere den (primalen) Simplexalgorithmus für ein lineares Programm in Normalform in Matlab (Algorithmus 7.6 aus der Vorlesung). Erstelle dazu eine Datei `simplex.m` und verwende

```
function [x,f,basis,iter] = simplex(A,b,c,basis,pricing)
```

als erste Zeile. Dabei sind `A,b,c` die Daten des linearen Programms

$$\begin{aligned} \min \quad & c^\top x \\ \text{sodass} \quad & A\,x = b \\ \text{und} \quad & x \geq 0 \end{aligned}$$

und `basis` beim Aufruf die Startbasis. Durch `pricing` sollen zwei Auswahlstrategien für $r \in N$ mit $\tilde{c}_r < 0$ und $s \in B$ möglich sein:

- `'greedy'`: Wähle die kleinsten reduzierten Kosten, d. h. $r = \arg\min_{j\in N} \tilde{c}_j$.
- `'bland'`: Verwende die Regel von Bland, d. h. die Indizes r und s sind die jeweils *kleinsten* in Frage kommenden Indizes.

Rückgabewerte sind ein optimaler Basisvektor `x`, der zugehörige Zielfunktionswert `f`, die zugehörige Basis `basis` und die Anzahl der benötigten Iterationen `iter`.

Teste den Algorithmus jeweils mit beiden Auswahlregeln an folgenden Problemen:

(a) Das lineare Programm aus Aufgabe 26 mit der Startbasis aus Teilaufgabe (b).

Hinweis: Mit dem Debugger von MATLAB (auch in Octave möglich) kann Schritt für Schritt getestet werden, ob der reduzierte Kostenvektor, die Richtung der Änderungen, die Indizes r und s, sowie die neue Basis und der neue Basisvektor richtig berechnet wurden.

(b) Das Mozartproblem in Normalform aus der Vorlesung (Beispiel 6.6). Wähle als Startbasis die Indizes der Schlupfvariablen.

(c) Das Programm mit folgenden Daten:

$$A = \begin{pmatrix} 1/4 & -8 & -1 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & -12 & -1/2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$c = \begin{pmatrix} -3/4 & 20 & -1/2 & 6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\top .$$

Wähle als Startbasis: $\{5, 6, 7\}$.

Hinweis: Der Quelltext ist angemessen zu kommentieren. Die Datei `simplex.m` von der Homepage zur Lehrveranstaltung kann als Vorlage genutzt werden.

Abgabe: Schicke die erzeugten `m`-Files (`simplex.m`, `test_`x`.m`, $x \in \{$`a`,`b`,`c`$\}$) an `max.winkler@mathematik.tu-chemnitz.de` (Betreff: HA Grundlagen der Optimierung Übung 7). Die Aufgabe kann bis zum 6. Dezember 2017 bearbeitet werden.