Grundlagen der Optimierung

Beispiele Lagrange-dualer Optimierungsaufgaben

Beispiel (Lagrange-Dualität bei QP)
Betrachte das **quadratische Optimierungsproblem** (**quadratisches Programm, QP**, siehe Definition 1.6)

$$\left.\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & f(x) = \frac{1}{2} x^\top Q x + c^\top x + \gamma \quad \text{über } x \in \Omega = \mathbb{R}^n \\ \text{sodass} \quad & A_1 x \le b_1 \\ \text{und} \quad & A_2 x = b_2 \end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

mit einer symmetrischen positiv semidefiniten Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $A_1 \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $A_2 \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $b_1 \in \mathbb{R}^m$, $b_2 \in \mathbb{R}^p$.
Beachte: (1.1) ist eine konvexe Optimierungsaufgabe.
Die Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = \frac{1}{2} x^\top Q x + c^\top x + \gamma + \mu^\top (A_1 x - b_1) + \lambda^\top (A_2 x - b_2).$$

ist konvex bzgl. x. Notwendig und hinreichend für das $\inf_{x\in\mathbb{R}^n} \mathcal{L}(x, \lambda, \mu)$ ist $\nabla_x \mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = 0$, also

$$Qx + c + A_1^\top \mu + A_2^\top \lambda = 0. \tag{$*$}$$

Das heißt, es gilt

$$q(\lambda, \mu) = \mathcal{L}(x, \lambda, \mu) \quad \Leftrightarrow \quad (*) \text{ gilt.}$$

Die duale Aufgabe ist demnach gegeben durch

$$\left.\begin{aligned} \text{Maximiere} \quad & \mathcal{L}(x, \lambda, \mu) && \text{über } (x, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m \\ \text{sodass} \quad & Qx + c + A_1^\top \mu + A_2^\top \lambda = 0 \\ \text{und} \quad & \mu \ge 0 \end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

und ist damit wieder ein QP. Ist Q sogar s. p. d., so können wir $(*)$ auflösen und x aus (1.2) eliminieren. ◇

Beispiel (Minimum-Norm-Lösung eines linearen Gleichungssystems)
Wir betrachten

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & \|x\| \quad \text{über } x \in \Omega = \mathbb{R}^n \\ \text{sodass} \quad & Ax = b \end{aligned} \tag{1.3}$$

mit der euklidischen Norm $\|\cdot\|$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Die Lagrange-Funktion ist

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = \|x\| + \lambda^\top (Ax - b).$$

Fall (I): Falls $\|A^\top \lambda\| > 1$, dann gibt es ein $z \in \mathbb{R}^n$ mit $\|z\| = 1$ und $z^\top A^\top \lambda > 1$. Wähle $x = -t\, z$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x, \lambda) &= t\,\|z\| - t\,\lambda^\top A z - \lambda^\top b \qquad \text{für } t \ge 0 \\ &= t\,\big(\underbrace{\|z\| - \lambda^\top A z}_{<0}\big) - \lambda^\top b \\ &\to -\infty \quad \text{für } t \to \infty. \end{aligned}$$

Fall (II): Falls $\|A^\top \lambda\| \le 1$, so gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(x,\lambda) &= \|x\| + \lambda^\top A x - \lambda^\top b \\
&\ge \big(1 - \|A^\top \lambda\|\big)\|x\| - \lambda^\top b \quad \text{Cauchy-Schwarz} \\
&\ge -\lambda^\top b,
\end{aligned}$$

und dieser Wert wird für $x^* = 0$ angenommen.
Zusammen folgt:

$$q(\lambda) = \begin{cases} -\lambda^\top b, & \text{falls } \|A^\top \lambda\| \le 1 \\ -\infty,, & \text{falls } \|A^\top \lambda\| > 1. \end{cases}$$

[Wegen der Konvexität der Lagrange-Funktion bzgl. x hätten wir auch mit $0 \in \partial_x \mathcal{L}(x,\lambda)$ argumentieren können.]
Das zu (1.3) duale Problem ist also äquivalent zu:

$$\begin{aligned}
\text{Maximiere} \quad & -\lambda^\top b \qquad \text{über } \lambda \in \mathbb{R}^m \\
\text{sodass} \quad & \|A^\top \lambda\| \le 1.
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Beachte: Das duale Problem hat eine diffbare Zielfunktion! $\diamond$