

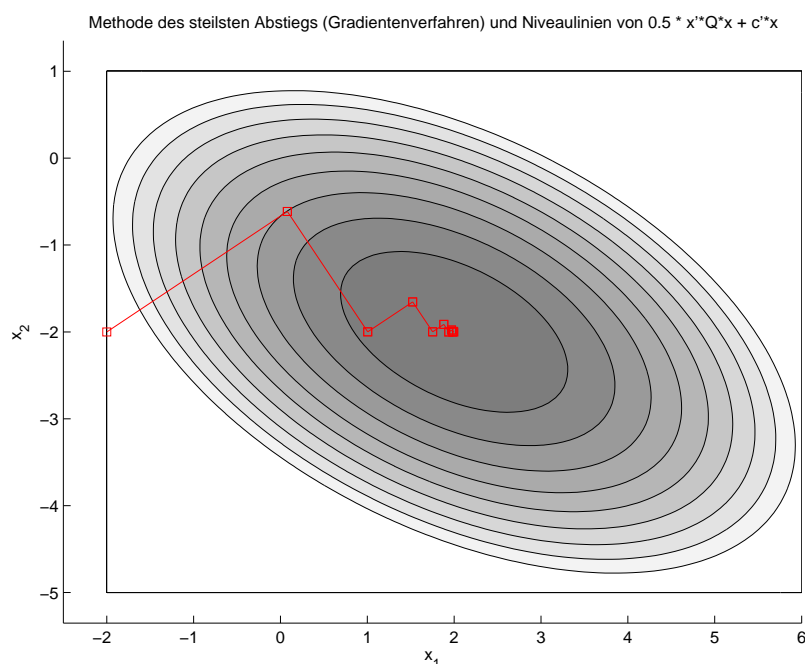
## Grundlagen der Optimierung

### Gradientenverfahren

Wir wenden das Gradientenverfahren (Algorithmus 4.4 mit Schrittweite aus der exakten Liniensuch) auf die quadratische Funktion  $f$  an:

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T Q x + c^T x + \gamma = \frac{1}{2} x^T \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix}^T x.$$

Ausgehend vom Startpunkt  $x_0 = (-2, -2)^T$  ergibt sich folgendes Konvergenzverhalten gegen die Lösung bei  $x^* = (2, -2)^T$ :

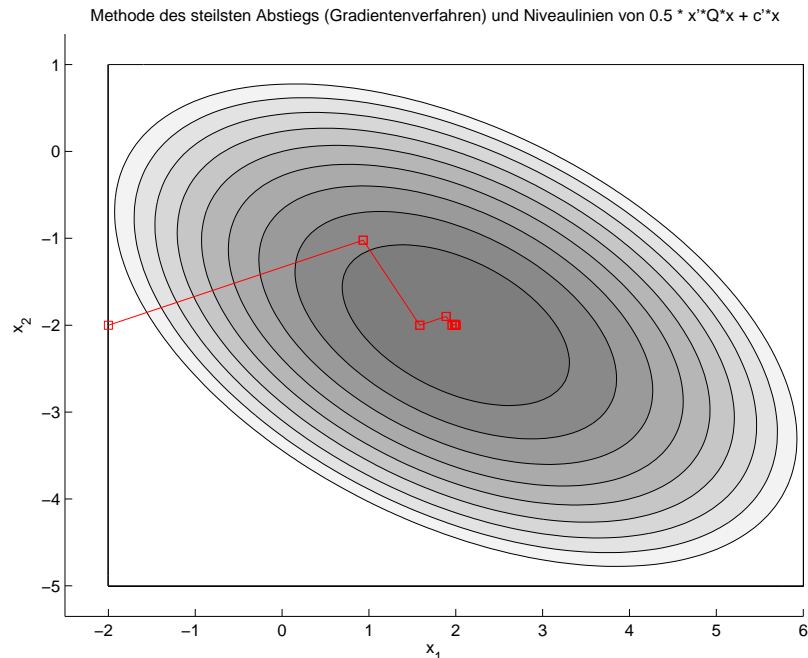


$k$	$\ x_k - x^*\ _Q$	$\frac{\ x_{k+1} - x^*\ _Q}{\ x_k - x^*\ _Q}$	$f(x_k) - f(x^*)$	$\frac{f(x_{k+1}) - f(x^*)}{f(x_k) - f(x^*)}$
0	6.93e+00	4.99e-01	2.40e+01	2.49e-01
1	3.46e+00	4.99e-01	5.97e+00	2.49e-01
2	1.72e+00	4.99e-01	1.49e+00	2.49e-01
3	8.60e-01	4.99e-01	3.70e-01	2.49e-01
4	4.29e-01	4.99e-01	9.21e-02	2.49e-01
5	2.14e-01	4.99e-01	2.29e-02	2.49e-01
6	1.07e-01	4.99e-01	5.70e-03	2.49e-01
7	5.33e-02	4.99e-01	1.42e-03	2.49e-01
8	2.66e-02	4.99e-01	3.53e-04	2.49e-01
9	1.33e-02	4.99e-01	8.80e-05	2.49e-01
10	6.62e-03		2.19e-05	

Im Beispiel gilt für die Größen aus dem Konvergenzsatz 4.10:

$$\kappa = \text{cond}_2(Q) = \text{cond}_2(Q; I) = 3.5, \quad \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} = 0.5556, \quad \left( \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \right)^2 = 0.3086.$$

Wir wenden das Gradientenverfahren erneut an, jedoch dieses Mal im  $M$ -Skalarprodukt mit der Wahl  $M = \text{diag}(Q)$ . Ausgehend vom selben Startpunkt  $x_0 = (-2, -2)^\top$  ergibt sich nun folgendes Konvergenzverhalten gegen die Lösung bei  $x^* = (2, -2)^\top$ :



$k$	$\ x_k - x^*\ _Q$	$\frac{\ x_{k+1} - x^*\ _Q}{\ x_k - x^*\ _Q}$	$f(x_k) - f(x^*)$	$\frac{f(x_{k+1}) - f(x^*)}{f(x_k) - f(x^*)}$
0	6.93e+00	3.22e-01	2.40e+01	1.04e-01
1	2.23e+00	3.22e-01	2.49e+00	1.04e-01
2	7.18e-01	3.22e-01	2.58e-01	1.04e-01
3	2.31e-01	3.22e-01	2.68e-02	1.04e-01
4	7.45e-02	3.22e-01	2.78e-03	1.04e-01
5	2.40e-02	3.22e-01	2.88e-04	1.04e-01
6	7.73e-03	3.22e-01	2.99e-05	1.04e-01
7	2.49e-03	3.22e-01	3.10e-06	1.04e-01
8	8.01e-04	3.22e-01	3.21e-07	1.04e-01
9	2.58e-04	3.22e-01	3.33e-08	1.04e-01
10	8.31e-05		3.45e-09	

Hier gilt nun für die Größen aus dem Konvergenzsatz 4.10:

$$\kappa = \text{cond}_2(Q; M) = 2.7836, \quad \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} = 0.4714 \quad \left(\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}\right)^2 = 0.2222.$$

Die bessere (kleinere) Konditionszahl zeigt sich im verbesserten Konvergenzverhalten.