Grundlagen der Optimierung

Ein Beispiel mit Dualitätslücke

In Geiger, Kanzow, 2002, Beispiel 6.12 findet sich folgendes Beispiel:

Beispiel 19.7 (Aufgabe mit Dualitätslücke)
Betrachte die Aufgabe

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & f(x) := \begin{cases} x^2 - 2x, & \text{falls } x \ge 0 \\ x, & \text{falls } x < 0 \end{cases} \quad \text{über } x \in \Omega = \mathbb{R} \\ \text{sodass} \quad & g(x) := -x \le 0. \end{aligned}$$

Es gilt

$$\mathcal{L}(x,\mu) = \begin{cases} x^2 - (2+\mu)\,x, & \text{falls } x \ge 0 \\ (1-\mu)\,x, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Für $\mu < 1$ ist $\mathcal{L}(x,\mu)$ bzgl. x nach unten unbeschränkt. Für $\mu \ge 1$ wird das Minimum von $\mathcal{L}(x,\mu)$ bzgl. x in $x^* = (2+\mu)/2$ angenommen.

$$\Rightarrow \qquad q(\mu) = \inf_{x\in\mathbb{R}} \mathcal{L}(x,\mu) = \begin{cases} -(2+\mu)^2/4, & \text{falls } \mu \ge 1, \\ -\infty, & \text{falls } \mu < 1. \end{cases}$$

Der primale Minimalwert ist $f^* = f(1) = -1$, der duale Maximalwert jedoch $d^* = q(1) = -9/4$.

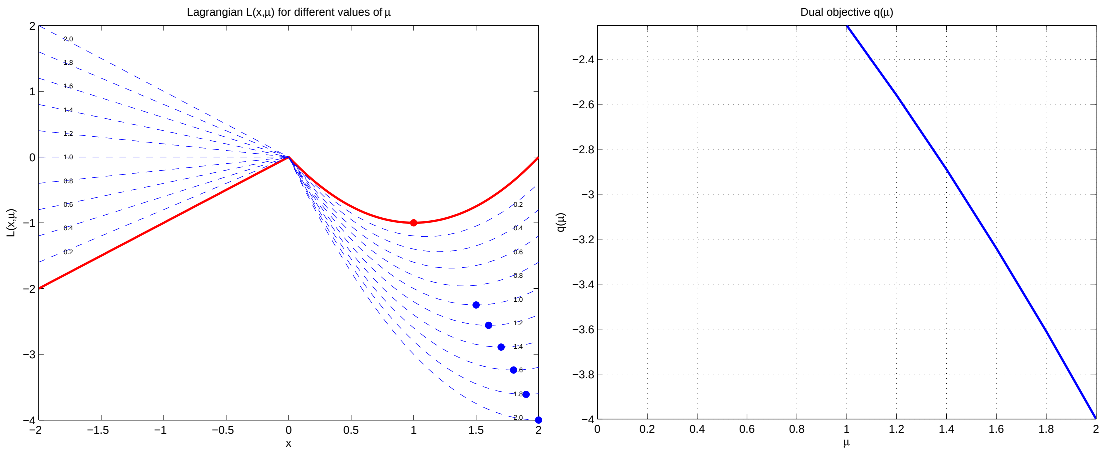

Abbildung 19.1: Links: Abbildung der Lagrange-Funktion $x \mapsto \mathcal{L}(x,\mu)$ für verschiedene Werte $\mu \in [-2,2]$ mit $\mu = 0$ (primale Zielfunktion) in rot. Eingezeichnet sind außerdem die Minimalstellen $x \mapsto \mathcal{L}(x,\mu)$, sofern vorhanden ($\mu \ge 1$). Rechts ist die duale Zielfunktion $\mu \mapsto q(\mu)$ dargestellt.

Beachte: Obwohl die primale Zielfunktion, eingeschränkt auf die konvexe zulässige Menge

$$X = \{x \in \Omega : g(x) \le 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \ge 0\},$$

konvex ist, tritt eine Dualitätslücke auf.[1] Dies bedeutet, dass alle unteren Schranken $q(\lambda, \mu)$ für den primalen Minimalwert f^* „schlecht" sind.
Wenn wir jedoch die primale Zielfunktion (ohne Einfluss auf die Lösung!) umdefinieren als $f(x) := x^2 - 2x$, sodass sie auf ganz $\mathbb{R}$ konvex wird, dann gilt weiterhin $f^* = f(1) = -1$, aber nun auch $d^* = q(0) = -1$. ◇

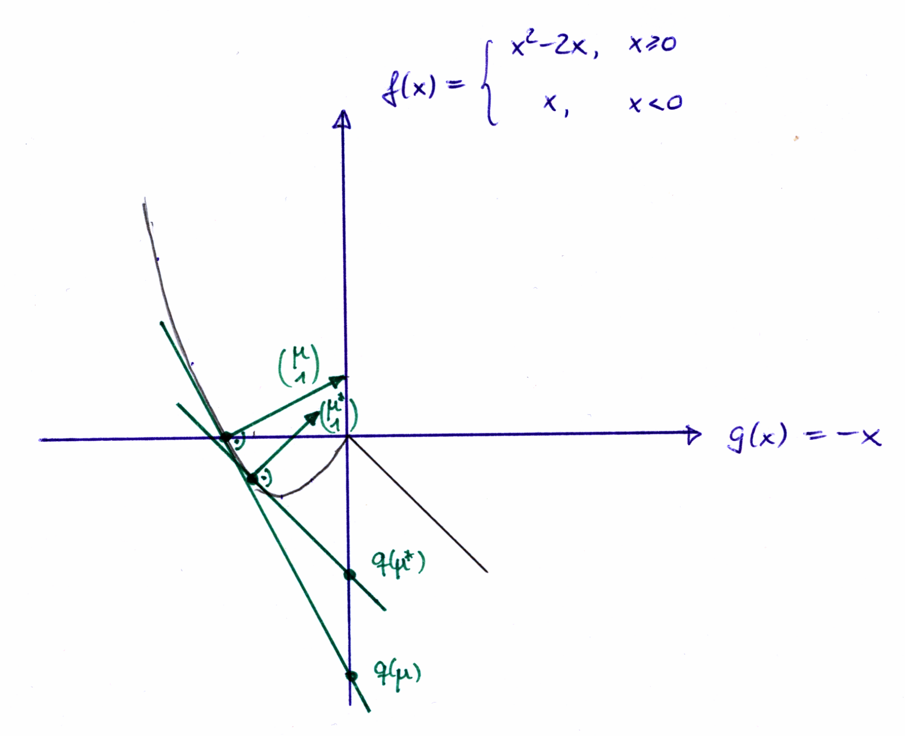

Abbildung 19.2: Darstellung der Berechnung der dualen Funktion $q(\mu)$ als Infimum von $\mathcal{L}(x, \mu) = (\mu, 1)^\top \cdot (g(x), f(x))^\top$ über $x \in \mathbb{R}$.

Literatur

Geiger, C., Kanzow, C. (2002). *Theorie und Numerik restringierter Optimierungsaufgaben.* New York: Springer. DOI: 10.1007/978-3-642-56004-0.

[1]Es handelt sich jedoch nicht um eine konvexe Optimierungsaufgabe, da f nicht global konvex ist, vgl. (17.10)!