Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. R. Herzog, J. Blechschmidt, A. Schäfer

Chemnitz, 6. Februar 2015
Abgabe am 13. Februar 2015

Grundlagen der Optimierung

Übung 15

Aufgabe 46: Beispiele für Guignard-CQ $\not\Rightarrow$ Abadie-CQ $\not\Rightarrow$ MFCQ $\not\Rightarrow$ LICQ

(a) Zeige, dass für das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{sodass} \quad & x_1 \cdot x_2 = 0 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

im Nullpunkt $x^* = (0,0)$ die Guignard-CQ, aber nicht die Abadie-CQ erfüllt ist.

(b) Gegeben seien die Funktionen $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$c(y) := \begin{cases} (y+1)^2, & y < -1, \\ 0, & -1 \leq y \leq 1, \\ (y-1)^2, & y > 1, \end{cases}$$

$g_1, g_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g_1(x) := c(x_1) - x_2$, $g_2(x) := c(x_1) + x_2$. Weiter sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine beliebige konvexe und stetig differenzierbare Funktion. Zeige, dass das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{sodass} \quad & g_1(x) \leq 0 \\ & g_2(x) \leq 0 \end{aligned}$$

ein konvexes Problem ist. Welche constraint qualifications aus Definition 16.5, 17.9 und 17.13 sind im Punkt $x^* = (0,0)$ erfüllt?

(c) Zeige, dass für das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1^2 + (x_2+1)^2 \\ \text{sodass} \quad & -x_1^3 - x_2 \leq 0 \\ & -x_2 \leq 0 \end{aligned}$$

im Nullpunkt $x^* = (0,0)$ die Bedingung MFCQ erfüllt ist, aber LICQ nicht erfüllt ist.

Aufgabe 47: Bei MPCCs ist in keinem zulässigen Punkt MFCQ erfüllt

Ein Problem der Form

$$\begin{aligned}
\text{Minimiere} \quad & f(x) && \text{über } x \in \mathbb{R}^n \\
\text{sodass} \quad & g(x) \leq 0, \quad h(x) = 0, \\
& G(x) \geq 0, \quad H(x) \geq 0, \quad G(x)^\top H(x) = 0
\end{aligned}$$

mit stetig differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ und $G, H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^M$ wird Optimierungsproblem mit Komplementaritätsbedingungen (engl: *mathematical program with complementarity constraints*, kurz: MPCC) genannt. Zeige, dass die MFCQ in keinem zulässigen Punkt von MPCC erfüllt ist.

Hausaufgabe 50: Umformulierung von Ungleichungsnebenbedingungen mit Hilfe von Slacks erhält MFCQ und LICQ

Wir betrachten die in Übung 14, Hausaufgabe 49 gegebenen Probleme. Es sei $x \in \mathbb{R}^n$ mit $g_i(x) \leq 0$ für $i = 1, \ldots, m$ und $s_i = -g_i(x)$ für $i = 1, \ldots, m$. Zeige, dass für Problem (3) MFCQ bzw. LICQ im Punkt x genau dann erfüllt ist, wenn MFCQ bzw. LICQ für das Problem (4) im Punkt (x, s) erfüllt ist.