Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. R. Herzog, J. Blechschmidt, A. Schäfer

Chemnitz, 30. Januar 2015
Abgabe am 6. Februar 2015

Grundlagen der Optimierung

Übung 14

Aufgabe 43: Abadie-CQ und Guignard-CQ am Beispiel

Untersuchen Sie bei folgenden Optimierungsaufgaben die Regularitätsbedingungen von Abadie und Guignard im jeweils einzigen zulässigen Punkt:

(a)

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & (x+1)^2 \quad \text{über } x \in \mathbb{R} \\ \text{unter} \quad & x^2 \leq 0, \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & (x+1)^2 \quad \text{über } x \in \mathbb{R} \\ \text{unter} \quad & x = 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 44: KKT-Bedingungen für quadratische Optimierungsprobleme

Wir betrachten die folgende quadratische Optimierungsaufgabe mit linearen Gleichungsnebenbedingungen:

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & \frac{1}{2}x^\top Q x + c^\top x \quad \text{über } x \in \mathbb{R}^n \\ \text{sodass} \quad & B\,x = d. \end{aligned}$$

Dabei sei $Q^\top = Q \succ 0$, und die Matrix $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ habe vollen Zeilenrang.

(a) Stelle die KKT-Bedingungen auf und formuliere diese als lineares Gleichungssystem.

(b) Ist der Lagrange-Multiplikator eindeutig bestimmt?

Aufgabe 45: Lagrange-Multiplikatoren für Minimax–Aufgabe

Wir betrachten das Problem:

$$\text{Minimiere} \quad \max\{f_1(x), \dots, f_r(x)\} \quad \text{über } x \in \mathbb{R}^n$$

mit stetig differenzierbaren Funktionen $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, r$.

Es sei x^* ein lokales Minimum. Zeige, dass dann „Lagrange-Multiplikatoren" μ_j^*, $j = 1, \ldots, r$ existieren, sodass gilt:

$$\sum_{j=1}^{r} \mu_j^* \nabla f_j(x^*) = 0, \qquad \mu^* \geq 0, \qquad \sum_{j=1}^{r} \mu_j^* = 1$$
$$\text{und} \quad \mu_j^* = 0, \quad \text{für } j \text{ mit } \; f_j(x^*) < \max\{f_1(x^*), \ldots, f_r(x^*)\}.$$

Hinweis: Betrachte das äquivalente Problem (die sogenannte Epigraph-Formulierung):

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & t & & \text{über } (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \\ \text{sodass} \quad & f_j(x) \leq t, & & j = 1, \ldots, r. \end{aligned}$$

Hausaufgabe 46: Grafisches Lösen, KKT-Bedingungen und `fmincon`

(a) Löse das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) := (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 & \\ \text{sodass} \quad & g_1(x) := x_1^2 - x_2 & \leq 0 \\ & g_2(x) := x_1 + x_2 - 2 & \leq 0 \end{aligned}$$

grafisch. Zeichne dazu die Niveaulinien von f und die zulässige Menge und markiere darin die optimale Lösung.

(b) Gilt LICQ in der Lösung? Bestimme die zugehörigen Lagrange-Multiplikatoren.

(c) **Zusatz:** Verwende den Befehl `fmincon` aus der Optimization-Toolbox von `Matlab`, um das Optimierungsproblem zu lösen. Lasse dir dabei auch die Lagrange-Multiplikatoren ausgeben.

Hausaufgabe 47: Ein weiterer Alternativsatz

Seien $A \in \mathbb{R}^{q \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$ zwei Matrizen mit $\operatorname{rank}(B) = p$. Zeige, dass dann entweder das System

$$Ad < 0, \quad Bd = 0$$

lösbar ist oder dass das System

$$A^\top \mu + B^\top \lambda = 0$$

eine Lösung $(\mu, \lambda) \neq 0$ mit $\mu \geq 0$ hat.
Hinweis: Farkas-Lemma 16.7

Hausaufgabe 48: Zusammenfassen von Lagrange-Multiplikatoren bei unteren und oberen Beschränkungen

Wir betrachten das folgende Optimierungsproblem mit Box-Beschränkungen

$$\left.\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & f(x) \qquad\qquad \text{über } x \in \mathbb{R}^n \\ \text{sodass} \quad & a \le g(x) \le b \\ \text{und} \quad & h(x) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Hierbei sind $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ stetig differenzierbar und $a, b \in \mathbb{R}^m$ mit $a \le b$.

(a) Formuliere eine zu (1) äquivalente Aufgabe von der Form (16.1) und gib die zugehörigen KKT-Bedingungen an.

(b) Zeige, dass diese KKT-Bedingungen zu den folgenden Gleichungen äquivalent sind

$$\begin{aligned} \nabla f(x) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \,\nabla g_i(x) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \,\nabla h_j(x) &= 0 \\ h(x) &= 0 \\ 0 \le (\mu_i)^+ ,\; g_i(x) \le b_i,\; (\mu_i)^+ \,(g_i(x) - b_i) &= 0 \qquad i = 1, \dots, m \\ 0 \le (\mu_i)^- ,\; a_i \le g_i(x),\; (\mu_i)^- \,(a_i - g_i(x)) &= 0 \qquad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \tag{2}$$

Dabei bezeichnet $(\mu_i)^+ = \max\{0, \mu_i\}$ den positiven Anteil und $(\mu_i)^- = -\min\{0, \mu_i\}$ den negativen Anteil von μ_i .

Hausaufgabe 49: Umformulierung von Ungleichungsnebenbedingungen mit Hilfe von Slacks

Wir betrachten das Problem

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & f(x) \quad \text{über } x \in \mathbb{R}^n \\ \text{sodass} \quad & g_i(x) \le 0, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \tag{3}$$

und das dazu äquivalente Problem

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & f(x) \quad \text{über } (x, s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \\ \text{sodass} \quad & g_i(x) + s_i = 0, \quad i = 1, \dots, m \\ \text{und} \quad & s \ge 0. \end{aligned} \tag{4}$$

(a) Gib die KKT-Bedingungen für beide Probleme an und zeige, dass sie zueinander äquivalent sind.

(b) Es sei $x \in \mathbb{R}^n$ mit $g_i(x) \le 0$ für $i = 1, \dots, m$ und $s_i = -g_i(x)$ für $i = 1, \dots, m$. Zeige, dass für Problem (3) die Abadie-CQ im Punkt x genau dann erfüllt ist, wenn sie für das Problem (4) im Punkt (x, s) erfüllt ist.