Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. R. Herzog, J. Blechschmidt, A. Schäfer

Chemnitz, 16. Januar 2015
Abgabe am 23. Januar 2015

Grundlagen der Optimierung

Übung 12

Aufgabe 37: Einige konvexe Kegel

Zeigen Sie, dass folgende Mengen konvexe Kegel sind.

(a) abgeschlossener Orthant $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0\}$

(b) Lorentzkegel $K = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \|x\|_2 \leq t\}$

(c) symmetrisch positiv semidefinite Matrizen $\mathcal{S}^n_+ = \{X \in \mathcal{S}^n : X \succeq 0\}$ als Teilmenge von $\mathcal{S}^n = \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} : X^\top = X\}$

Aufgabe 38: Operationen auf Kegeln

Beweise (e) und (f) von Satz 14.3 aus der Vorlesung (Operationen auf Kegeln).

Aufgabe 39: Eigenschaften des Polarkegels und ein Beispiel

(a) Skizziere den Polarkegel zu

$$X = \Big\{x = (x_1,\, x_2)^\top \in \mathbb{R}^2 \;:\; (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 \leq 1\Big\} \cup \Big\{(3,\, 1)^\top\Big\}.$$

(b) Beweise Lemma 14.6 aus der Vorlesung.

Hausaufgabe 39: Beispiele konvexer Mengen und Kegel

Seien

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{f \in C([0,1], \mathbb{R}) :\; f(0) = f(1)\},\\
A_2 &= \{f \in C([0,1], \mathbb{R}) :\; f(0) \neq 0\},\\
A_3 &= \{f \in C([0,1], \mathbb{R}) :\; f(0) = 2\},\\
A_4 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\; y \geq 0,\; |x - 1| \leq y\}.
\end{aligned}$$

Prüfen Sie, ob die Mengen A_i konvex, Kegel oder sogar konvexe Kegel sind.
Hinweis: $C([0,1], \mathbb{R})$ bezeichnet die Menge der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[0,1]$ mit Werten in $\mathbb{R}$.

Hausaufgabe 40: Grafische Darstellung einiger Polarkegel

Stellen Sie die Polarkegel von folgenden Mengen dar:

(a) $M_1 = \{(-1,-1)\} \cup \{(1,1)\}$

(b) $M_2 = \mathrm{conv}(\{(1,2),(-1,2),(0,1)\})$

(c) $M_3 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ \|x\|^2 \leq 1\}$

Hausaufgabe 41: Polarkegel der konischen Hülle

Seien $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Zeige: der Polarkegel zu $K = \mathrm{cone}\{x_1, \dots, x_m\}$ ist $K^\circ = \{s \in \mathbb{R}^n : s^\top x_j \leq 0 \text{ für } j = 1, \dots, m\}$.

Hausaufgabe 42: Einige Polarkegel

Bestimme zu folgenden konvexen Kegeln den jeweiligen Polarkegel.

(a) abgeschlossener Orthant $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0\}$

(b) Lorentzkegel $K = \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \|x\|_2 \leq t\}$

(c) symmetrisch positiv semidefinite Matrizen $\mathcal{S}^n_+ = \{X \in \mathcal{S}^n : X \succeq 0\}$ als Teilmenge von $\mathcal{S}^n = \{X \in \mathbb{R}^{n\times n} : X^\top = X\}$

Hinweise:

- Für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ ist das kanonische Skalarprodukt $\langle A, B\rangle := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} b_{ij}$. Verwende dieses Skalarprodukt in Teil (c).
- Es gilt $\langle A, B\,C\rangle = \left\langle A\,C^\top, B\right\rangle$ (für passende Dimensionen).
- Für jede symmetrischen Matrix $X \in \mathcal{S}^n$ existiert die Spektralzerlegung. D.h. sei $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von X und $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die zugehörigen Eigenwerte, dann gilt $X = \sum_{i=1}^n \lambda_i\, v_i\, v_i^\top$.