Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. R. Herzog, J. Blechschmidt, A. Schäfer

Chemnitz, 9. Januar 2015
Abgabe am 16. Januar 2015

Grundlagen der Optimierung

Übung 11

Aufgabe 35: Menge aller Minoranten am Beispiel

Sei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ (x-1)^2 - 1, & x < 0. \end{cases}$$

Skizziere die Funktion f und beschreibe jeweils die Menge aller linearen Minoranten, die f in den Punkten $x_0 = 0$ beziehungsweise $x_0 = 1$ stützen.

Aufgabe 36: Kettenregel für das Subdifferential

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ konvex, und $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $h(x) = f(A\,x + b)$. Wegen Satz 11.11 (b) ist h konvex. Zeige eine Kettenregel für das Subdifferential, d.h. beweise das die Beziehung

$$\partial h(x) = A^\top \partial f(A\,x + b)$$

gilt.

Hausaufgabe 36: Subdifferentiale von Normen

(a) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \|x\|_2$. Zeige, dass für das Subdifferential

$$\partial f(x) = \begin{cases} \{\frac{x}{\|x\|_2}\}, & \text{falls } x \neq 0, \\ \{s \in \mathbb{R}^n : \|s\|_2 \leq 1\}, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

gilt.

(b) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \|x\|_1$. Zeige, dass das Subdifferential durch die Beziehung

$$s \in \partial f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \text{für alle } i = 1, \ldots, n \text{ gilt } s_i \in \begin{cases} \{-1\} & \text{falls } x_i < 0 \\ [-1, 1] & \text{falls } x_i = 0 \\ \{1\} & \text{falls } x_i > 0 \end{cases}$$

beschrieben werden kann.

Hausaufgabe 37: Subdifferential einer konvexen differenzierbaren Funktion

Beweise Satz 13.12 aus der Vorlesung.
Hinweis: Verwende dazu Satz 13.10.

Hausaufgabe 38: Das Subdifferential einer konvexen Funktion ist ein monotoner Operator

(a) Zeige das Analogon zu Satz 11.12 (a) (iii): Sei $C \subset \mathbb{R}^n$ konvex und $f : C \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion sowie $x_1, x_2 \in C$, dann gilt:

$$(s_1 - s_2)^\top (x_1 - x_2) \geq 0$$

für alle $s_i \in \partial f(x_i)$, $i = 1, 2$. Das heißt, das Subdifferential ist ein (mengenwertiger) monotoner Operator.

(b) Wie ändert sich die Aussage, falls f sogar strikt konvex ist? Folgere daraus für $x_1, x_2 \in \operatorname{int}(C)$ die Beziehung

$$\partial f(x_1) \cap \partial f(x_2) \neq \emptyset \iff x_1 = x_2.$$