
Grundlagen der Optimierung

Übung 9

Aufgabe 27: Operationen auf konvexen Mengen

Beweise Teil (c), (d) und (e) von Satz 11.3 aus der Vorlesung.

Aufgabe 28: Minkowski-Summe am Beispiel

In der Ebene sei $K = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 \leq \frac{1}{2}\}$ eine Kreisfläche und $Q = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_\infty = 2\}$ die Vereinigung der Seiten eines Quadrates. Beschreibe die Minkowski-Summe $K + Q$ anhand einer Skizze.

Aufgabe 29: Jensensche Ungleichung

Es sei $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ mit $C \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex. Zeige, dass f genau dann konvex ist, wenn für beliebige endliche Mengen $\{x_1, \dots, x_k\} \subset C$ und beliebige $(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^k$ mit $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$ und $(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \geq 0$ gilt:

$$f\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^k \alpha_i f(x_i).$$

Aufgabe 30: Zur Abgeschlossenheit von $\text{conv } A$

Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen. Ist dann auch $\text{conv } A$ abgeschlossen?

Hausaufgabe 28: Konvexität bei der Besteuerung von Ehepaaren

Betrachten wir ein Ehepaar, bei dem die Partner die Einkommen y_1 und y_2 beziehen. Es bezeichne $T(y)$ die Steuerschuld als Funktion vom Einkommen (genauer: Bemessungsgrundlage) und $E(y_1, y_2)$ die Steuerschuld des Haushaltes. In Deutschland kann das Ehepaar zwischen

(a) **Individualbesteuerung** $E(y_1, y_2) = T(y_1) + T(y_2)$ und

(b) **Ehegattensplitting**¹ $E(y_1, y_2) = 2 T((y_1 + y_2)/2)$

wählen.

Erläutere den steuerlichen Vorteil des Ehegattensplittings unter Verwendung des Begriffes Konvexität.

Hausaufgabe 29: Der Epigraph ist genau dann konvex, wenn f konvex ist

Sei $C \subset \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge und $f : C \rightarrow \mathbb{R}$. Die Menge

$$\text{epi}(f) := \{(x, y) \in C \times \mathbb{R} : y \geq f(x)\}$$

heißt **Epigraph** von f . Zeige, dass f genau dann konvex ist, wenn $\text{epi}(f)$ konvex ist. Gilt eine analoge Aussage auch für die Levelmengen $\mathcal{L}_f(r) := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq r\}$, d.h.

$$f \text{ ist konvex} \iff \mathcal{L}_f(r) \text{ ist konvex für alle } r \in \mathbb{R}?$$

Hausaufgabe 30: Abschätzung des Abstandes zum globalen Minimum durch die Werte der Zielfunktion

Es sei $C \subset \mathbb{R}^n$ konvex, $C \neq \emptyset$. Weiter sei $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ eine gleichmäßig konvexe Funktion auf C und x^* das globale Minimum von $f(x)$ über C .

(a) Man zeige, dass unter den gegebenen Voraussetzungen die Abschätzung

$$\|x - x^*\|^2 \leq \frac{2}{\mu} |f(x) - f(x^*)|$$

gilt.

(b) Gilt dies auch, wenn man nicht voraussetzt, dass x^* ein globales Minimum von $f(x)$ über C ist?

¹Hier wird das Haushaltseinkommen gedanklich auf die beiden Partner gleich aufgeteilt und diese aufgeteilten Beträge werden dem Steuertarif unterworfen.