Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. R. Herzog, J. Blechschmidt, A. Schäfer

Chemnitz, 5. Dezember 2014
Abgabe am 12. Dezember 2014

Grundlagen der Optimierung

Übung 8

Aufgabe 24: Würfel von Klee-Minty

Wir betrachten das lineare Problem

$$\begin{array}{rrcrcrcrcrcl}
\max & \multicolumn{11}{l}{2^{n-1}x_1 + 2^{n-2}x_2 + \ldots + 2x_{n-1} + x_n} \\
\text{sodass} & x_1 & & & & & & & & & \leq & 5 \\
& 4x_1 & + & x_2 & & & & & & & \leq & 25 \\
& 8x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & & & & & \leq & 125 \\
& \vdots & & & & & & & & & & \vdots \\
& 2^n x_1 & + & 2^{n-1}x_2 & + & \ldots & + & 4x_{n-1} & + & x_n & \leq & 5^n \\
\text{und} & \multicolumn{11}{l}{x \geq 0}
\end{array}$$

Löse das Problem für verschiedene n mit dem Simplex-Algorithmus (in Matlab). Verwende dabei die Indizes der eingeführten Schlupfvariablen als Startbasis und *negativste reduzierte Kosten* als Auswahlstrategie. Wie hängen die vom Simplex-Algorithmus benötigten Iterationen mit n zusammen?

Aufgabe 25: Duales LP für verschiedene Beispiele

(a) Zeige, dass sich das duale vom dualen eines LP in Normalform wieder als das primale Problem auffassen lässt.

(b) Zeige, dass sich die rechten linearen Programme jeweils als das duale der linken linearen Programme auffassen lassen.

(a)

$$\begin{array}{ll@{\qquad}ll}
\max & c^\top x & \min & b^\top \lambda \\
\text{sodass} & Ax \leq b & \text{sodass} & A^\top \lambda \geq c \\
& x \geq 0 & & \lambda \geq 0
\end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{ll@{\qquad}ll}
\min & c^\top x & \max & b^\top \lambda \\
\text{sodass} & Ax \geq b & \text{sodass} & A^\top \lambda = c \\
& x \text{ frei} & & \lambda \geq 0
\end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{llll} \max & c^\top x & \min & (A\ell - b)^\top \lambda_1 + (u-\ell)^\top \lambda_2 + c^\top \ell \\ \text{sodass} & Ax = b & \text{sodass} & A^\top \lambda_1 - \lambda_2 \le -c \\ & \ell \le x \le u & & \lambda_1 \text{ frei}, \ \lambda_2 \ge 0 \end{array}$$

Hinweis: Überführe zunächst in Normalform.

Aufgabe 26: Beispiele für LPs mit (un-)zulässigen und (un-)beschränkten primalen/dualen Problemen

(a) Gib ein lineares Programm an, bei dem sowohl das primale als auch das duale Problem unzulässig ist (vgl. Satz 8.7, Fall (II)).

(b) Gib ein lineares Programm an, bei dem das primale zulässig und unbeschränkt ist und das zugehörige duale Problem unzulässig ist (vgl. Satz 8.7, Fall (III)).

Hausaufgabe 25: Selbstduale LPs

Wir betrachten das lineare Problem

$$\begin{array}{rl} \min & c^\top x \\ \text{sodass} & Ax \le b \\ \text{und} & x \ge 0 \end{array}$$

(a) Zeige, dass das Problem selbstdual ist, falls $A = -A^\top$ und $b = c$ gilt.

(b) Zeige, dass der Optimalwert eines solchen LPs Null ist, falls das Problem überhaupt einen zulässigen Punkt besitzt.

Hausaufgabe 26: Finden eines zulässigen Punktes und Lösen ist gleich schwer

Betrachte die folgenden beiden Probleme

(a) Finde zu einem LP einen zulässigen Punkt oder stelle die Unzulässigkeit fest.

(b) Finde zu einem LP eine Lösung oder stelle fest, dass es keine Lösung gibt.

Zeige, dass beide Probleme gleich schwer sind, das heißt, kennt man einen beliebigen Algorithmus, der eines der Probleme löst, kann man auch das andere damit lösen.

Hausaufgabe 27: Modifikation des Simplexalgorithmus für „Box-Beschränkungen“

(a) Modifiziere (ohne zu programmieren) den Simplexalgorithmus so, dass er effizient lineare Programme mit „Box-Beschränkungen“, d.h.

$$\begin{aligned} \min \quad & c^\top x \\ \text{sodass} \quad & Ax = b \\ \text{und} \quad & \ell \leq x \leq u \end{aligned}$$

($A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c, \ell, u \in \mathbb{R}^n$, $\operatorname{rank} A = m$, $\ell < u$) bearbeiten kann (ohne es zunächst auf Normalform zu bringen). Gehe dabei wie in Abschnitt § 7.1 (bis vor Satz 7.3) zur Herleitung des Simplex-Schrittes vor. Formuliere auch eine zu Lemma 7.1 analoge Aussage. Kann das Problem unbeschränkt sein?

Hinweis: Spalte die Menge N der Nichtbasisvariablen in $N_u = \{i \in N : x_i = u_i\}$ und $N_\ell = \{i \in N : x_i = \ell_i\}$ auf.

(b) Wie kann man das Problem

$$\begin{aligned} \min \quad & c^\top x \\ \text{sodass} \quad & a \leq Ax \leq b \\ \text{und} \quad & \ell \leq x \leq u \end{aligned}$$

„effizient“ auf die obige Form bringen?