Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. R. Herzog, J. Blechschmidt, A. Schäfer

Chemnitz, 28. November 2014
Abgabe am 5. Dezember 2014

Grundlagen der Optimierung
Übung 7

Aufgabe 22: Implementierung des Simplex-Algorithmus

Implementiere den (primalen) Simplexalgorithmus für ein lineares Programm in Normalform in Matlab (Algorithmus 7.6 aus der Vorlesung). Erstelle dazu eine Datei `simplex.m` und verwende

```
function [x,f,basis,iter] = simplex(A,b,c,basis,pricing)
```

als erste Zeile. Dabei sind `A,b,c` die Daten des linearen Programms

$$\begin{array}{rl} \min & c^\top x \\ \text{sodass} & A\,x = b \\ \text{und} & x \geq 0 \end{array}$$

und `basis` beim Aufruf die Startbasis. Durch `pricing` sollen zwei Auswahlstrategien für $r_k \in N_k$ mit $\tilde{c}_{r_k} < 0$ und $s_k \in B_k$ möglich sein:

- Negativste reduzierte Kosten: Wähle ein $r_k \in N_k$ mit $\tilde{c}_{r_k} = \min_{j \in N_k} \tilde{c}_j$.
- Regel von Bland: Wähle in Schritt 6 r_k und in Schritt 11 s_k als den jeweils *kleinsten* in Frage kommenden Index.

Rückgabewerte sind ein optimaler Basisvektor `x` und die zugehörige Basis `basis`. Teste den Algorithmus jeweils mit beiden Auswahlregeln an folgenden Problemen:

(a) Das lineare Programm aus Übung 6, Aufgabe 20 mit der Startbasis aus Übung 6, Aufgabe 20 (f).

(b) Das Mozartproblem in Normalform aus der Vorlesung (Beispiel 6.6). Wähle als Startbasis die Indizes der Schlupfvariablen.

(c) Das Programm mit folgenden Daten:

$$A = \begin{pmatrix} 1/4 & -8 & -1 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & -12 & -1/2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$c = \begin{pmatrix} -3/4 & 20 & -1/2 & 6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\top.$$

Wähle als Startbasis: $\{5, 6, 7\}$.

Hinweis: Der Quelltext ist angemessen zu kommentieren. Sie können die Vorlage `simplex.m` von der Homepage zur Lehrveranstaltung nutzen.

Aufgabe 23: Phase I Bestimmung am Beispiel

Betrachten Sie das folgende lineare Optimierungsproblem

$$\begin{array}{rrcl} \min & x_1 + x_2 + 2\,x_3 & & \\ \text{sodass} & 2\,x_1 + x_2 - x_3 & = & 1 \\ & x_1 - x_2 + 4\,x_3 & = & 2 \\ & 3\,x_1 + x_2 + 2\,x_3 & \leq & 5 \\ & 2\,x_1 - x_2 + x_3 & \leq & 1 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 & \geq & 0. \end{array}$$

Formulieren Sie anhand der Vorlesung ein geeignetes Phase-I-Problem.

Hausaufgabe 23: Simplex-Verfahren in 3D

Betrachten Sie das folgende lineare Optimierungsproblem

$$\begin{array}{rrcl} \max & x_1 + x_2 - 2\,x_3 & & \\ \text{sodass} & x_1 + x_2 + x_3 & = & 2 \\ & x_2 & \leq & 1 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 & \geq & 0. \end{array}$$

(a) Lösen Sie das Problem grafisch.

(b) Formen Sie das Optimierungsproblem in ein LP in Normalform um.

(c) Berechnen Sie alle Basisvektoren (mit zugehöriger Basis- und Nichtbasismatrix) und identifizieren Sie sie in der Skizze aus (a).

(d) Welche der Basisvektoren sind zulässig?

(e) Bestimmen Sie die Ecken des Polyeders in Normalform aus der Nebenbedingung des LPs in (b).

(f) Lösen Sie das Programm „von Hand“ mit dem Simplex-Algorithmus (Algorithmus 7.6) Starten Sie mit dem zu $(x_1, x_2) = (1, 1)$ gehörenden Basisvektor aus (b).

Hausaufgabe 24: Implementation von Phase I

Implementiere „Phase I“ für ein lineares Programm in Normalform (Standardform) in `Matlab`. Erstelle dazu `simplex_phaseI.m` und verwende `function [x,basis] = simplex_phaseI(A,b,c,pricing)` als erste Zeile. Dabei sind `A,b,c` die Daten des linearen Programms

$$\begin{array}{rl} \min & c^\top x \\ \text{sodass} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

und `pricing` gibt die Auswahlstrategie an. Rückgabewerte sind ein für Phase II zulässiger Basisvektor `x` und die zugehörige Basis `basis`. Auch der Fall, dass kein zulässiger Punkt existiert, ist abzufangen. Teste den Algorithmus an dem in Übung 6, Aufgabe 20 angegebenen Beispiel.

Hinweis: Es darf der Simplex-Algorithmus von der Webseite zur Lehrveranstaltung benutzt werden.