Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. R. Herzog, J. Blechschmidt, A. Schäfer

Chemnitz, 21. November 2014
Abgabe am 28. November 2014

Grundlagen der Optimierung

Übung 6

Aufgabe 20: Verschiedene Verfahren zum Lösen eines LPs

Betrachten Sie das folgende lineare Optimierungsproblem

$$\begin{array}{rrcl} \min & 3\,x_1 + x_2 & & \\ \text{sodass} & x_1 - x_2 & \leq & 3 \\ & x_1 - 3x_2 & \leq & 1 \\ & x_1,\ x_2 & \geq & 0. \end{array}$$

(a) Lösen Sie das Problem grafisch.

(b) Formen Sie das Optimierungsproblem in ein LP in Normalform um.

(c) Berechnen Sie alle Basisvektoren (mit zugehöriger Basis- und Nichtbasismatrix) und identifizieren Sie sie in der Skizze aus (a).

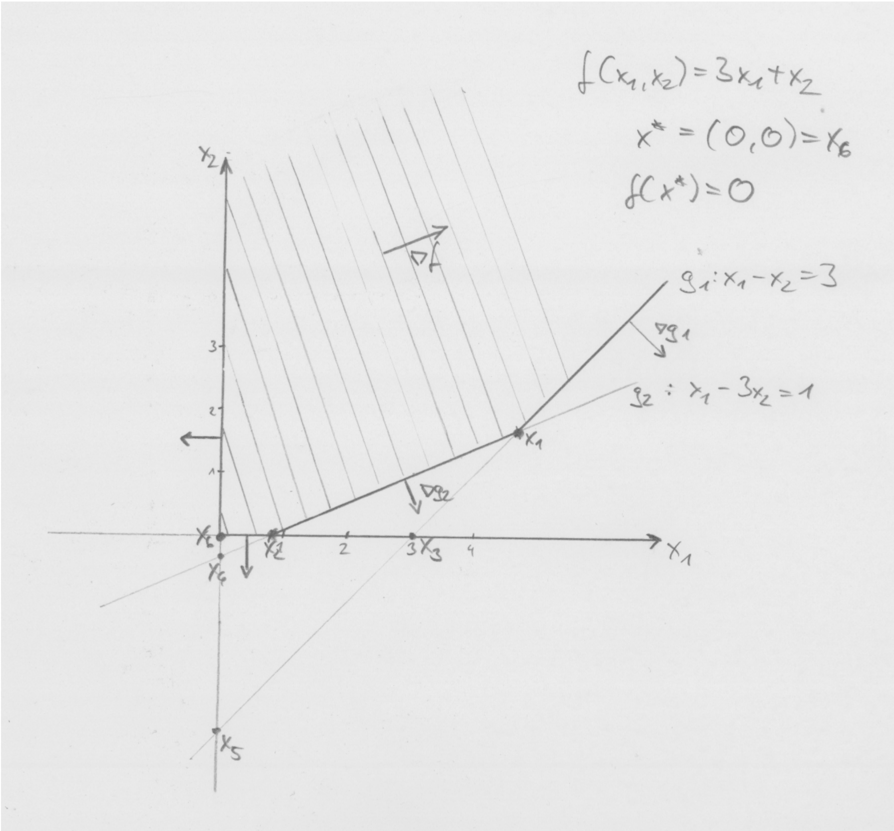
(d) Welche der Basisvektoren sind zulässig?

(e) Bestimmen Sie die Ecken des Polyeders in Normalform aus der Nebenbedingung des LPs in (b).

(f) Lösen Sie das Programm „von Hand" mit dem Simplex-Algorithmus (Algorithmus 7.6). Starten Sie mit dem zu $(x_1, x_2) = (4, 1)$ gehörenden Basisvektor aus (b).

Lösung Aufgabe 20:

(a)



(b) Die Normalform lautet

$$\begin{array}{rrcrcrcrcl} \text{min} & 3x_1 & + & x_2 & & & & & & \\ \text{sodass} & x_1 & - & x_2 & + & s_1 & & & = & 3 \\ & x_1 & - & 3x_2 & & & + & s_2 & = & 1 \\ \text{und} & \multicolumn{9}{l}{x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ s_1 \geq 0,\ s_2 \geq 0.} \end{array}$$

Diese passt mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad n = 4$$

in die Form

$$\begin{array}{rl} \text{min} & c^\top x \quad \text{über } x \in \mathbb{R}^n \\ \text{sodass} & Ax = b \\ \text{und} & x \geq 0 \end{array}$$

(c) Wir berechnen alle $\binom{4}{2} = 6$ mögliche Basen.

$$B_1 = \{1,2\} \quad \Rightarrow x_{B_1} = A_{B_1}^{-1} b = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow x_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0 \text{ ist zulässig}$$

$$\text{mit Basismatrix } A_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \text{ und Nichtbasismatrix } A_{3,4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_2 = \{1,3\} \quad \Rightarrow x_{B_2} = A_{B_2}^{-1} b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0 \text{ ist zulässig}$$

$$\text{mit Basismatrix } A_{1,3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und Nichtbasismatrix } A_{2,4} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_3 = \{1,4\} \quad \Rightarrow x_{B_3} = A_{B_3}^{-1} b = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow x_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \ngeq 0 \text{ ist nicht zulässig}$$

$$\text{mit Basismatrix } A_{1,4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ und Nichtbasismatrix } A_{2,3} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_4 = \{2,3\} \quad \Rightarrow x_{B_4} = A_{B_4}^{-1} b = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 8/3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow x_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/3 \\ 8/3 \\ 0 \end{pmatrix} \ngeq 0 \text{ ist nicht zulässig}$$

$$\text{mit Basismatrix } A_{2,3} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \text{ und Nichtbasismatrix } A_{1,4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_5 = \{2,4\} \quad \Rightarrow x_{B_5} = A_{B_5}^{-1} b = \begin{pmatrix} -3 \\ -8 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow x_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} \ngeq 0 \text{ ist nicht zulässig}$$

$$\text{mit Basismatrix } A_{2,4} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \text{ und Nichtbasismatrix } A_{1,3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_6 = \{3,4\} \quad \Rightarrow x_{B_6} = A_{B_6}^{-1} b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow x_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0 \text{ ist zulässig}$$

$$\text{mit Basismatrix } A_{3,4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und Nichtbasismatrix } A_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

(d) Zulässig sind die Basisvektoren wenn ihre Komponenten ≥ 0 sind, also sind x_1, x_2 und x_6 zulässig, siehe auch c).

(e) Nach Satz 6.13 sind alle zulässigen Basisvektoren aus c) Ecken. Da in b) bereits alle Basisvektoren ausgerechnet wurden, kann es keine weiteren Ecken geben.

Alternativ kann auch Satz 6.10 benutzt werden. Vielleicht sollte man darauf hinweisen.

(f) Wir starten mit $B_0 = \{1, 2\}$, $N_0 = \{3, 4\}$, $x^0 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\top$

Dann ergeben sich die folgenden Simplex-Schritte

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{N_0} &= c_{N_0} - A_{N_0}^\top A_{B_0}^{-\top} c_{B_0} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}^{-\top} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow r_0 = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_B^0 &= A_{B_0}^{-1} a_{r_0} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\hat{t}_0 := \min_{i \in B_0, d_i^0 > 0} \frac{x_i^0}{d_i^0} = \frac{x_{s_0}^0}{d_{s_0}^0} = 2 \qquad \Longrightarrow s_0 = 2$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x^1 = \begin{pmatrix} 4 - 2 \cdot 3/2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ B_1 = \{1, 3\} \\ N_1 = \{2, 4\} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{N_1} &= c_{N_1} - A_{N_1}^\top A_{B_1}^{-\top} c_{B_1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-\top} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 10 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow r_1 = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_B^1 &= A_{B_1}^{-1} a_{r_1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\hat{t}_1 := \min_{i \in B_1, d_i^1 > 0} \frac{x_i^1}{d_i^1} = \frac{x_{s_1}^1}{d_{s_1}^1} = 1 \quad \Longrightarrow s_1 = 1$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ B_2 = \{3, 4\} \\ N_2 = \{1, 2\} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{N_2} &= c_{N_2} - A_{N_2}^\top A_{B_2}^{-\top} c_{B_2} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-\top} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow x^2 \text{ ist Lösung} \end{aligned}$$

Aufgabe 21: Beweis von Satz 6.13

Beweise Satz 6.13 aus der Vorlesung.

Lösung Aufgabe 21:

„$\Rightarrow$“ Sei x eine Ecke von P. Wir bezeichnen die Indexmenge, auf der x positiv ist mit

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}(x) := \{i \in \{1, \dots, n\}, x_i > 0\}.$$

Die Spalten von $A_\mathcal{I}$ sind nach Satz 6.10 linear unabhängig. Falls $|\mathcal{I}| < m$ gilt, kann $\mathcal{I}$ (wegen $\operatorname{rank} A = m$) zu einer Basis B ergänzt werden.

„$\Leftarrow$“ Sei x ein Basisvektor mit Basis B. Aus $\mathcal{I} = \mathcal{I}(x) \subset B$ folgt die lineare Unabhängigkeit der Spalten von $A_\mathcal{I}$ und damit aus Satz 6.10, dass x eine Ecke ist.

Hausaufgabe 19: Jeder zulässige Basisvektor kann optimal sein

Es sei x ein zulässiger Basisvektor zur Basis B des durch $x \in \mathbb{R}^n$, $Ax = b$, $x \geq 0$ ($A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$) beschriebenen Polyeders. Zeige, dass ein Kostenvektor $c \in \mathbb{R}^n$ existiert, sodass x die einzige Optimallösung von

$$\begin{aligned} \min \quad & c^\top x \\ \text{sodass} \quad & Ax = b \\ \text{und} \quad & x \geq 0 \end{aligned}$$

ist. Das heißt, jeder zulässige Basisvektor kann optimal sein.

Lösung Hausaufgabe 19:

Wir setzen
$$c_j := \begin{cases} 0 & \text{falls } j \in B \\ 1 & \text{falls } j \notin B. \end{cases}$$
Dann ist x optimal wegen $c^\top x = 0$ und $c^\top y \geq 0$ für alle zulässigen y.

Darüber hinaus ist x einzige Optimallösung, denn sei $y \neq x$ eine weitere Optimallösung, d.h.
$$c^\top y = 0 \quad \Longrightarrow \quad y_j = 0 \text{ für } j \notin B.$$
Aus $Ay = b$ folgt
$$A_B y_B = b \quad \Longrightarrow \quad y_B = A_B^{-1} b = x_B \quad \Longrightarrow \quad y = x$$
und damit ein Widerspruch zu $y \neq x$.

Hausaufgabe 20: LPs in Normalform umschreiben

Formen Sie die folgenden linearen Programme in Normalform um.

(a) $$\begin{array}{rrcl} \min & x_1 + x_2 & & \\ \text{sodass} & x_1 + x_2 & \geq & 3, \end{array}$$

(b) $$\begin{array}{rrcl} \max & x_1 + x_2 & & \\ \text{sodass} & x_1 + x_2 & \geq & 3 \\ & x_1,\ x_2 & \leq & 0, \end{array}$$

(c) $$\begin{array}{rrcl} \max & x_1 + x_2 & & \\ \text{sodass} & x_1 + x_2 & \geq & 3 \\ & x_1 - 2\,x_2 & \geq & -1 \\ & 2\,x_1 - x_2 & \leq & 1 \\ & x_2 & \geq & 0. \end{array}$$

Lösung Hausaufgabe 20:

(a) Erste Umformungen ergeben: $$\begin{array}{rrcl} \min & x_1 + x_2 & & \\ \text{sodass} & x_1 + x_2 - s & = & 3, \\ & s & \geq & 0. \end{array}$$

Setze $x_1 = x_1^+ - x_1^-$, $x_2 = x_2^+ - x_2^-$: $$\begin{array}{rrcl} \min & x_1^+ - x_1^- + x_2^+ - x_2^- & & \\ \text{sodass} & x_1^+ - x_1^- + x_2^+ - x_2^- - s & = & 3, \\ & x_1^+,\ x_1^-,\ x_2^+,\ x_2^-,\ s & \geq & 0. \end{array}$$

(b) Erste Umformungen ergeben:
$$\begin{array}{rrcl} \min & -x_1 - x_2 & & \\ \text{sodass} & x_1 + x_2 - s & = & 3 \\ & -x_1,\ -x_2,\ s & \geq & 0. \end{array}$$

Setze $\tilde{x}_1 := -x_1$ und $\tilde{x}_2 := -x_2$:
$$\begin{array}{rrcl} \min & \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 & & \\ \text{sodass} & -\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 - s & = & 3 \\ & \tilde{x}_1,\ \tilde{x}_2,\ s & \geq & 0 \end{array}$$

Beachte: Die zulässige Menge ist leer.

(c) Erste Umformungen ergeben:
$$\begin{array}{rrcl} \min & -x_1 - x_2 & & \\ \text{sodass} & x_1 + x_2 - s_1 & = & 3 \\ & x_1 - 2\,x_2 - s_2 & = & -1 \\ & 2\,x_1 - x_2 + s_3 & = & 1 \\ & x_2,\ s_1,\ s_2,\ s_3 & \geq & 0. \end{array}$$

Setze $x_1 = x_1^+ - x_1^-$:
$$\begin{array}{rrcl} \min & -x_1^+ + x_1^- - x_2 & & \\ \text{sodass} & x_1^+ - x_1^- + x_2 - s_1 & = & 3 \\ & x_1^+ - x_1^- - 2\,x_2 - s_2 & = & -1 \\ & 2\,x_1^+ - 2x_1^- - x_2 + s_3 & = & 1 \\ & x_1^+,\ x_1^-,\ x_2,\ s_1,\ s_2,\ s_3 & \geq & 0. \end{array}$$

Hausaufgabe 21: Basisvektoren eines LPs bestimmen

Gegeben sei das Polyeder in Normalform $P = \{x \in \mathbb{R}^7 \mid Ax = b, x \geq 0\}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Vektoren sind (zulässige) Basisvektoren des Polyeders P?

(a) $x = (2, 1, 3, -2, 0, 0, 0)^\top$

(b) $x = (1, 0, 3, 0, 1, 0, 0)^\top$

(c) $x = (1, 0, 3, 0, 3, 1, 0)^\top$

(d) $x = (2, 2, 0, 0, 0, 0, 3)^\top$

(e) $x = (2, 1, 1, 0, 2, 0, 2)^\top$

Lösung Hausaufgabe 21:

Für einen (zulässigen) Basisvektor x sind die folgenden Sachen zu prüfen:

(a) Es gilt $Ax = b$.

(b) Es existiert $B \subseteq \{1, \ldots, 7\}$ mit $|B| = 4$, sodass A_B regulär ist und $x_N = 0$ für $N = \{1, \ldots, 7\} \setminus B$.

(c) (Es gilt $x \geq 0$.)

Teste das nun an den einzelnen Vektoren.

(a) $Ax = b$ ist erfüllt. Wähle $B = \{1, 2, 3, 4\}$, dann ist A_B regulär und $x_{5,6,7} = 0$.

$\Rightarrow x = (2, 1, 3, -2, 0, 0, 0)^\top$ ist ein Basisvektor, der nicht zulässig ist.

(b) $Ax = (4, 4, 1, 3)^\top \neq b$.

$\Rightarrow x = (1, 0, 3, 0, 1, 0, 0)^\top$ ist kein Basisvektor.

(c) $Ax = b$ ist erfüllt. Wähle $B = \{1, 4, 5, 6\}$, dann ist A_B regulär und $x_{2,3,7} = 0$.

$\Rightarrow x = (1, 0, 3, 0, 3, 1, 0)^\top$ ist ein zulässiger Basisvektor.

(d) $Ax = b$ ist erfüllt. Wähle $B = \{1, 2, 6, 7\}$, dann ist A_B regulär und $x_{3,4,5} = 0$.

$\Rightarrow x = (2, 2, 0, 0, 0, 0, 3)^\top$ ist ein zulässiger Basisvektor.

(e) In B sind mindestens alle aktiven Indizes, also $B = \{1, 2, 3, 5, 7\}$. Damit kann A_B nicht regulär sein.

$\Rightarrow x = (2, 1, 1, 0, 2, 0, 2)^\top$ ist kein Basisvektor.

Hausaufgabe 22: Lösung des Tischlereiproblems

Löse die Tischlereiaufgabe aus Übung 1, Aufgabe 2 mit der Simplexmethode, ohne die Ganzzahligkeit der Variablen zu fordern!

Hinweis: Die auftretenden Gleichungssysteme können numerisch (z. B. mit `Matlab`) gelöst werden. Nutzen Sie auch, dass sie mit `A(:,[1,2,4,5])` auf einzelne Spalten von `A` zugreifen können, im Beispiel auf die Spalten `1`, `2`, `4` und `5`.

Lösung Hausaufgabe 22:

Die Lösung mittels implementiertem Simplex findet sich unter `Optimierung/Aufgabe_063/solution.m`.