Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. R. Herzog, J. Blechschmidt, A. Schäfer

Chemnitz, 7. November 2014
Abgabe am 14. November 2014

Grundlagen der Optimierung

Übung 4

Aufgabe 13: Newton-Verfahren zur Nullstellensuche am Beispiel

Wir suchen die Nullstellen des folgenden Polynoms

$$f(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 + 21x - 18.$$

Bestimmen Sie ausgehend von Startpunkt $x^{(0)} = 0$ mit dem Newton-Verfahren eine Näherung einer Nullstelle bis $|f(x^{(k)})| < 0.01$.

Aufgabe 14: Konvergenzverhalten des Newton-Verfahrens am Beispiel

Wir betrachten das lokale Newton-Verfahren zur Minimierung der Funktion $f(x) = \cos x$. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass es quadratisch gegen einen stationären Punkt konvergiert, wenn man nur nah genug daran startet. Ansonsten lässt sich allerlei Unfug treiben.

(a) Bestimme einen Startpunkt x_0, sodass (bei exakter Rechnung) die Folge der Iterationspunkte x_k bestimmt gegen ∞ divergiert.

(b) Bestimme einen Startpunkt x_0, sodass die Folge der Iterationspunkte zwischen zwei verschiedenen (nichtoptimalen) Punkten alterniert.

Aufgabe 15: Einschränkung $\sigma \in (0, \frac{1}{2})$ sichert die quadratische Konvergenz

In Algorithmus 5.11 (Globalisiertes Newtonverfahren) aus der Vorlesung wird der Armijo-Schrittweitenparameter σ auf $\sigma \in (0, \frac{1}{2})$ eingeschränkt, um die lokal quadratische Konvergenzgeschwindigkeit des Newton-Verfahrens zu ermöglichen. Zeige anhand der quadratischen Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^\top Qx + c^\top x + \gamma$ ($Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ s.p.d., $c \in \mathbb{R}^n, \gamma \in \mathbb{R}$) die Notwendigkeit der beschriebenen Einschränkung und fertige für den Fall $n = 1$ eine Skizze an.

Aufgabe 16: Affine Invarianz des Newton-Verfahrens

(a) Zeige, dass die vom lokalen Newton-Verfahren zur Lösung von $F(x) = 0$ mit $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ erzeugte Folge invariant gegenüber affin-linearen Transformationen ist. Damit ist gemeint: Seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulär und $c \in \mathbb{R}^n$. Das lokale Newton-Verfahren zur Lösung von $F(x) = 0$ mit Start im Punkt x_0 erzeuge die Folge $\{x_k\}$. Das lokale Newton-Verfahren für die Funktion $G(y) := F(Ay + c)$ mit Start in y_0 erzeuge die Folge $\{y_k\}$. Aus $x_0 = Ay_0 + c$ folgt $x_k = Ay_k + c$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

(b) Gilt das auch für das lokale Newton-Verfahren zur Minimierung einer Funktion f?

(c) Ist auch das Gradientenverfahren (mit dem euklidischen Skalarprodukt) mit fester Schrittweite 1 invariant gegenüber affin-linearen Transformationen?

Hausaufgabe 14: Implementation des globalisierten Newton-Verfahrens

Implementiere das globalisierte Newton-Verfahren mit allgemeinen Skalarprodukt und Armijo-Schrittweitenstrategie in Matlab (Algorithmus 5.11 aus der Vorlesung). Verwende das Abbruchkriterium aus Bemerkung 4.7 (a) und (b). Erstelle dazu eine Datei `newton_method.m` und verwende `function X = newton_method(fhandle, M, x0, tol, s, sigma, beta, rho, p)` als erste Zeile. Dabei bezeichnet `fhandle` das Handle auf eine Funktion, `M` die Skalarprodukt induzierende Matrix, `x0` den Startpunkt, `tol` eine Struktur, welche die vier Parameter `ATOL_f`, `RTOL_f`, `ATOL_x` und `RTOL_x` für das Abbruchkriterium aus Bemerkung 4.7 (a) und (b) enthält, `s`, `sigma` und `beta` die Parameter für die Armijo-Schrittweitensuche und `rho` und `p` die im Algorithmus 5.11 verwendeten Parameter, um eine gute Abstiegsrichtung zu gewährleisten. Zurückgegeben werden soll eine Matrix $X = [x0, x1, x2, \ldots]$, welche den gesamten Iterationsverlauf enthält.

Teste das implementierte Verfahren an den Funktionen aus Übung 3, Hausaufgabe 12. mit `rho`=1 und `p`=3. Visualisiere den Iterationsverlauf und vergleiche die hier benötigten Iterationen mit denen des Gradienten-Verfahrens.

Schicke die erzeugten Dateien an `jan.blechschmidt@mathematik.tu-chemnitz.de` (Betreff: HA Grundlagen der Optimierung Übung 4)!

Hinweis 1: Es können die Dateien von der Webseite der Lehrveranstaltung verwendet werden (insbesondere: `steepest_descent_armijo.m`, `rosenbrock.m` und `ls_armijo.m`).
Hinweis 2: Der Quelltext ist angemessen zu kommentieren.

Hausaufgabe 15: Konvergenz des vereinfachten Newton-Verfahrens

Man betrachte anstelle der Newton-Folge die vereinfachte Newton-Folge

$$x_{k+1} = x_k - F'(x_0)^{-1}F(x_k).$$

Es sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine einmal stetig differenzierbare Funktion und $x^* \in \mathbb{R}^n$ mit $F(x^*) = 0$ und die Jacobimatrix $F'(x^*)$ regulär. Zeige, dass eine Umgebung $\mathcal{U}(x^*)$ um x^* exisitert, sodass für jedes $x_0 \in \mathcal{U}(x^*)$ gilt:

(a) Das vereinfachte Newton-Verfahren ist wohldefiniert und erzeugt eine gegen x^* konvergente Folge $\{x_k\}$.

(b) Die Konvergenzrate ist q-linear.

Was sind Vor- und Nachteile gegenüber dem normalen Newton-Verfahren?