und aus der linearen Unabhängigkeit der $(a_i)_{i\in\mathcal{I}(x)}$ folgt $y_i = z_i$ auch für $i \in \mathcal{I}(x)$. Insgesamt gilt also $y = z$, d. h., nach Definition 6.9 ist x eine Ecke von P. □

Beachte: Der Koordinatenvektor einer Ecke eines Polyeders in Normalform (6.5) muss mindestens $n - m$ Nulleinträge haben, da jeweils höchstens m Spalten von $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ linear unabhängig sind (siehe auch Abbildung 6.4).

Aus Satz 6.10 ergibt sich folgende Idee zur Generierung potentieller Ecken:[13]

- Ein Vektor $x \in P \subset \mathbb{R}^n$ ist durch n Bedingungen festgelegt.
- Wähle eine Indexmenge $N \subset \{1, 2, \dots, n\}$ mit $|N| = n-m$ und setze $x_i = 0$ für $i \in N$.
- Die restlichen Indizes bilden die Menge $B \subset \{1, 2, \dots, n\} \setminus N$ mit $|B| = m$.

Die Wahl von N erfolge so, dass der Punkt x durch die Bedingungen $Ax = b$ und $x_i = 0$ für $i \in N$ eindeutig bestimmt ist. Die Spalten von A und die Komponenten von x werden so umsortiert und partitioniert, dass

$$A = [A_B\ A_N] \quad \text{und} \quad A_B x_B + A_N \underbrace{x_N}_{=0} = b$$

gilt. Dann soll also $A_B x_B = b$ eindeutig lösbar sein, also A_B vollen Rang haben, d. h. invertierbar (regulär) sein.

Ende 9. V

Definition 6.11 (Basisvektor, Basis)**.**

Es sei P wie in (6.5) ein Polyeder in Normalform. Es sei $B \subset \{1, \dots, n\}$ mit $|B| = m$ eine (geordnete) Indexmenge (ein m-Tupel) von Spaltenindizes und $N = \{1, \dots, n\} \setminus B$.

(a) Ist die Untermatrix A_B mit Spaltenindizes B regulär, so heißt B eine **Basis** und A_B die zugehörige **Basismatrix**. N heißt dann **Nichtbasis** und A_N die zugehörige **Nichtbasismatrix**.

(b) Es sei A_B eine Basismatrix. Ein $x \in \mathbb{R}^n$ heißt **Basisvektor** (**BV**) von P zur Basis B, wenn $A_B x_B = b$ und $x_N = 0$ gilt.

(c) In der Literatur wird ein Basisvektor auch häufig als **Basislösung** bezeichnet. (Dieser Praxis folgen wir hier nicht.)

(d) Ein Basisvektor/Eine Basislösung heißt **zulässig**, wenn $x_B \geq 0$ gilt.

(e) Ist x ein Basisvektor zur Basis B, dann heißen die Komponenten von x_B **abhängige Variable** und die Komponenten von x_N **unabhängige Variable**.

Beachte: Damit eine Basis existiert, muss notwendig A vollen Rang haben, also $\operatorname{rang}(A) = m$ sein. Dies kann zumindest theoretisch immer durch Streichen von Zeilen erreicht werden, wobei numerisch die Bestimmung des Ranges schwierig sein kann.

[13] In Matlab: `I = find(x); rank(A(:,I))` muss übereinstimmen mit `length(I)`.

Beispiel 6.12 (Basisvektoren)**.**

Es seien[14]

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Der Vektor $x = (2,0,0,2,6,0,3)^\top$ ist zulässiger Basisvektor zur Basis $B = \{1,4,5,7\}$, denn: Die Untermatrix

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist regulär (d. h., B ist Basis), und es gilt $x_B = (2,2,6,3)^\top \geq 0$, $x_N = (0,0,0)^\top$ sowie $A_B x_B = b$. Ein anderer zulässiger Basisvektor zu $B = \{4,5,6,7\}$ ist $x_B = b$, da $b \geq 0$ ist.

Satz 6.13 (Ecken sind zulässige Basisvektoren)**.**

Es sei P wie in (6.5) ein Polyeder in Normalform und $\operatorname{rang}(A) = m$. Dann sind äquivalent:

(a) x ist eine Ecke von P.

(b) x ist zulässiger Basisvektor von P zu einer geeigneten Basis.

Beweis: Beweis in Übung 6, Aufgabe 21, siehe [Geiger and Kanzow, 2002, Satz 3.5] □

Satz 6.14 (Hauptsatz der linearen Optimierung[15])**.**

Es sei P wie in (6.5) ein Polyeder in Normalform und $\operatorname{rang}(A) = m$. Dann gilt:

(a) Ist $P \neq \emptyset$, dann besitzt P mindestens einen zulässigen Basisvektor (eine Ecke).

(b) P hat nur endlich viele zulässige Basisvektoren (Ecken).

(c) Besitzt das Problem

$$\text{Minimiere} \quad c^\top x \quad \text{sodass } x \in P$$

eine Lösung, so ist auch einer der zulässigen Basisvektoren von P eine Lösung.

Die Aussage (c) bedeutet, dass die Lösungsmenge eines LPs unter den obigen Voraussetzungen[16] entweder leer ist oder mindestens eine Ecke enthält.

---

[14] [Geiger and Kanzow, 2002, Beispiel 3.17 auf S. 97]

[15] [Geiger and Kanzow, 2002, Satz 3.6]

[16] Diese Aussage gilt aber auch für beliebige LPs.

Beweis: (a): Gehört der Nullvektor zu P, dann ist er ein zulässiger Basisvektor zu jeder Basis. Andernfalls wählen wir ein $x^* \in P$ mit der minimalen Anzahl positiver Komponenten. Die Indexmenge $\mathcal{I}(x^*) = \{1 \le i \le n : x_i^* > 0\}$ ist nicht leer. Wir zeigen, dass die Spaltenvektoren $(a_i), i \in \mathcal{I}(x^*)$ linear unabhängig sind. Nach Satz 6.10 ist dann x^* eine Ecke, und nach Satz 6.13 auch ein zulässiger Basisvektor von P (zu einer geeigneten Basis).

Wir nehmen an, die Spaltenvektoren $(a_i), i \in \mathcal{I}(x^*)$ seien linear abhängig, also gilt

$$\sum_{i \in \mathcal{I}(x^*)} \gamma_i \, a_i = 0,$$

und o. B. d. A. ist mindestens ein $\gamma_i < 0$. Wegen $x_i^* > 0$ für alle $i \in \mathcal{I}(x^*)$ können wir wie im Beweis von Lemma 6.8 $\delta = \min\{-\frac{x_i^*}{\gamma_i} : \gamma_i < 0, \; i \in \mathcal{I}(x^*)\} > 0$ wählen, sodass

$$x_i^* + \delta \, \gamma_i \ge 0 \quad \text{für alle } i \in \mathcal{I}(x^*)$$

ist und mindestens einmal Gleichheit gilt. Der Vektor

$$\bar{x} = \begin{cases} x_i^* + \delta \, \gamma_i, & \text{falls } i \in \mathcal{I}(x^*) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gehört dann zu P [Beweis wie in Satz 6.10], hat aber weniger positive Komponenten als x^*, im Widerspruch zur Voraussetzung.

(b): Es gibt nur endlich viele, genauer: höchstens $\binom{n}{m}$, Möglichkeiten, eine Basis, d. h. m linear unabhängige Spalten von A auszuwählen.[17] Zu jeder Basis gehört nur genau ein Basisvektor (der auch unzulässig sein kann).

(c): Nach Voraussetzung ist der Optimalwert

$$f^* = \inf\{c^\top x : x \in P\}$$

endlich. Wir betrachten nun das LP mit der modifizierten zulässigen Menge

$$\text{Minimiere} \quad c^\top x \quad \text{sodass } x \in \widehat{P} = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, \; x \ge 0, \; c^\top x = f^*\}.$$

Nach Voraussetzung ist $\widehat{P} \ne \emptyset$, und $\widehat{P}$ ist wieder ein Polyeder in Normalform [so als ob A und b eine zusätzliche Zeile bekämen]. Ist $\widehat{P} = P$, also die Zielfunktion konstant auf P, so sind insbesondere alle zulässigen Basisvektoren von P Lösung.

Ist $\widehat{P} \subsetneq P$, so gilt rang $\binom{A}{c^\top} = m + 1$.[18] Nach Teil (a) besitzt $\widehat{P}$ mindestens einen zulässigen Basisvektor x^*, der nach Satz 6.13 eine Ecke von $\widehat{P}$ ist. Wir zeigen, dass x^* auch Ecke von P ist. Es seien also $y, z \in P$ und $\lambda \in (0,1)$, sodass $x^* = \lambda \, y + (1-\lambda) \, z$ gilt.

$$f^* \overset{x^* \in \widehat{P}}{=} c^\top x^* = \lambda \underbrace{c^\top y}_{\ge f^*} + (1-\lambda) \underbrace{c^\top z}_{\ge f^*} \ge \lambda f^* + (1-\lambda) f^* = f^*,$$

Also gilt $c^\top y = c^\top z = f^*$, d. h., $y, z \in \widehat{P}$. Da x^* eine Ecke von $\widehat{P}$ ist, muss $y = z$ gelten. Damit ist x^* eine Ecke von P und nach Satz 6.13 auch zulässiger Basisvektor von P, und wegen $x^* \in \widehat{P}$ ist x^* eine Lösung des LP. □

[17] Hierbei ignorieren wir die Anordnung der Basiselemente, da sie keinen Einfluss auf den zugehörigen Basisvektor hat.

[18] Zu den Gleichungen $Ax = b$ muss eine neue Zeile dazukommen, die wesentlich ist.

Beachte: Jeder zulässige Basisvektor x könnte die Lösung eines LP in Normalform sein, d. h., zu jedem solchen X gibt es einen Kostenvektor c, sodass x die einzige Lösung des LP ist.[19]

§ 7 Simplex-Algorithmus

Literatur: [Geiger and Kanzow, 2002, Kapitel 3.2–3.4]

Idee des Simplex-Algorithmus': Springe von einer Ecke zu einer benachbarten Ecke, bis es keine bessere (mit kleinerem Funktionswert) mehr gibt. [Benachbart bedeutet: B und N unterscheiden sich jeweils genau in einem Index.]

§ 7.1 Der Simplex-Schritt

Literatur: [Geiger and Kanzow, 2002, Kapitel 3.2]

Es sei x irgendein (zulässiger) Basisvektor von P (zur Konstruktion siehe § 7.2) zur Basis B, und es sei $N = \{1, \ldots, n\} \setminus B$. Die Spalten von A und die Komponenten von x und c seien entsprechend partitioniert. Wir betrachten nun einen beliebigen weiteren zulässigen Vektor z, den wir ebenso partitionieren wie x, und vergleichen $c^\top x$ und $c^\top z$:

$$\begin{aligned} c^\top z &= c_B^\top z_B + c_N^\top z_N && \text{(Komponenten von } c\text{)} \\ &= c_B^\top \big(A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N z_N\big) + c_N^\top z_N && \text{(denn } Az = A_B z_B + A_N z_N = b\text{)} \\ &= c_B^\top x_B + \big(c_N^\top - c_B^\top A_B^{-1} A_N\big) z_N && \text{(denn } Ax = A_B x_B + A_N \underbrace{x_N}_{=0} = b\text{)} \\ &= c^\top x + \big(\underbrace{c_N - A_N^\top A_B^{-\top} c_B}_{=:\widetilde{c}_N}\big)^\top z_N && \end{aligned} \tag{7.1}$$

Den Vektor $\widetilde{c}_N$ bezeichnet man als **reduzierte Kosten**.

Lemma 7.1 (Erkennen einer Lösung)**.**
Es sei x ein zulässiger Basisvektor zur Basis B. Wenn für die reduzierten Kosten
$$\widetilde{c}_N := c_N - A_N^\top A_B^{-\top} c_B \ge 0$$
gilt, dann ist x eine Lösung des LP (6.3).

Beweis: unmittelbar aus der obigen Darstellung, beachte $z_N \ge 0$ □

Strategie: Wähle einen Index $r \in N$ („**pricing**") mit $\widetilde{c}_r < 0$.

Ansatz:
$$z_r(t) := t \ge 0, \quad z_j(t) := 0 \text{ für alle } j \in N \setminus \{r\}.$$
Dann ist
$$c^\top z(t) = c^\top x + \widetilde{c}_N^\top z_N(t) = c^\top x + t\, \widetilde{c}_r \tag{$*$}$$

[19] Übung 6, Hausaufgabe 19

und damit $c^\top z(t) \le c^\top x$ für alle $t \ge 0$. Die Zulässigkeitsbedingung $Az(t) = b$ liefert

$$\begin{aligned}
& A_B z_B(t) + A_N z_N(t) = b \\
\Leftrightarrow\quad & A_B z_B(t) + t\, a_r = b && (r\text{-te Spalte von } A) \\
\Leftrightarrow\quad & z_B(t) = A_B^{-1}(b - t\, a_r) \\
\Leftrightarrow\quad & z_B(t) = x_B - t\, \underbrace{A_B^{-1} a_r}_{=:d_B} && (d_B \text{ ist die Richtung der Änderung}) \qquad (**)
\end{aligned}$$

Beachte: In Abhängigkeit von t wird $z_N(t)$ durch den Ansatz und $z_B(t)$ durch $(**)$ definiert.

Lemma 7.2 (Erkennen eines unbeschränkten LPs)**.**
Gilt $d_B \le 0$, so ist das LP (6.3) unbeschränkt, also nicht lösbar.

Ende 10. V

Beweis: Nach Konstruktion sind alle Vektoren $z(t)$ mit $t \ge 0$ zulässig für (6.3), erfüllen also $z(t) \ge 0$ und $Az(t) = b$. Es gilt

$$c^\top z(t) = c^\top x + t\, \widetilde{c}_r \quad \text{für alle } t \ge 0.$$

Wegen $\widetilde{c}_r < 0$ gilt

$$\inf_{t \ge 0} c^\top z(t) = -\infty.$$

□

Es sei also nun $d_i > 0$ für mindestens ein $i \in B$. Die Zulässigkeitsbedingung $z(t) \ge 0$ ist genau dann erfüllt, wenn

$$t \ge 0 \quad \text{und} \quad z_i(t) = x_i - t\, d_i \ge 0 \text{ für alle } i \in B$$

oder äquivalent dazu

$$0 \le t \le \frac{x_i}{d_i} \text{ für alle } i \in B \text{ mit } d_i > 0$$

gilt. Um mit $z(t)$ einen neuen zulässigen *Basisvektor* zu erhalten, muss eine Komponente von B nach N wechseln, denn r wechselt ja von N nach B. Wir wählen deshalb als Schrittlänge in z_r

$$\hat{t} := \min\left\{\frac{x_i}{d_i} : \ i \in B,\ d_i > 0\right\} = \frac{x_s}{d_s} \qquad \text{„}\textbf{Quotiententest}\text{“(„}\textbf{ratio test}\text{“).} \tag{7.2}$$

Als **Simplex-Schritt** bezeichnet man, ausgehend von einem gegebenen zulässigen Basisvektor x zur Basis B,

(*i*) die Berechnung der reduzierten Kosten $\widetilde{c}_N$ (LGS mit $A_B^\top$ lösen),

(*ii*) die Auswahl eines Index' $r \in N$ mit $\widetilde{c}_r < 0$ („pricing“),

(*iii*) die Bestimmung des Vektors d_B (LGS mit A_B lösen) und der Schrittlänge $\hat{t}$ nach (7.2) („ratio test“)

(*iv*) und die Bestimmung des neuen zulässigen Basisvektors $x^+ := z(\hat{t})$ und der geänderten Basis $B^+ := \big(B \cup \{r\}\big) \setminus \{s\}$ und Nichtbasis $B^+ := \big(N \cup \{s\}\big) \setminus \{r\}$.

Wir fassen zusammen: