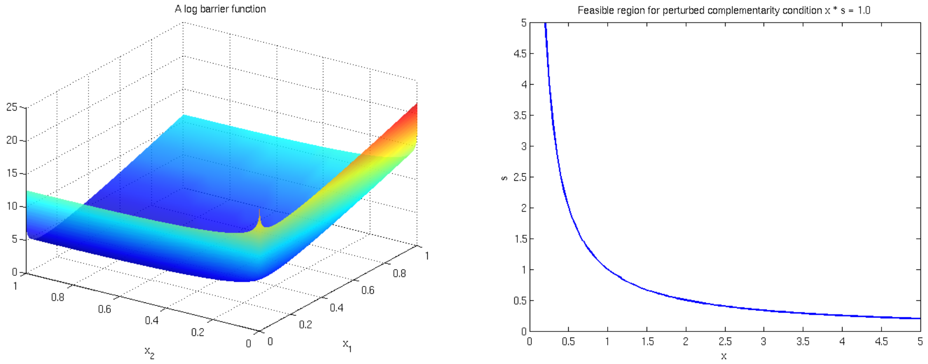

Abbildung 10.1. Ein Barrierefunktional mit $c = (10, 1)^\top$ und $\tau = 1$ (links) und zulässige Region bzgl. der gestörten Komplementaritätsbedingung $x\, s = \tau$ (rechts).

(a) Ist $x^{*(\tau)}$ eine Lösung des primalen Barriere-Problems (10.5), dann existieren $(\lambda^{*(\tau)}, s^{*(\tau)})$, sodass $(x^{*(\tau)}, \lambda^{*(\tau)}, s^{*(\tau)})$ das System (10.4) erfüllt.

(b) Ist $(\lambda^{*(\tau)}, s^{*(\tau)})$ eine Lösung des dualen Barriere-Problems (10.6), dann existiert $x^{*(\tau)}$, sodass $(x^{*(\tau)}, \lambda^{*(\tau)}, s^{*(\tau)})$ das System (10.4) erfüllt.

(c) Erfüllt $(x^{*(\tau)}, \lambda^{*(\tau)}, s^{*(\tau)})$ das System (10.4), dann ist $x^{*(\tau)}$ eine Lösung von (10.5), und $(\lambda^{*(\tau)}, s^{*(\tau)})$ ist eine Lösung von (10.6).

Beweis: Ein vollständiger Beweis folgt später[46] (Satz 17.8), siehe auch [Geiger and Kanzow, 2002, Satz 4.1]. □

Beachte: Das Pfad-Problem (10.4) hat nicht immer eine Lösung!

Beispiel 10.2 (Unlösbares Pfad-Problem)**.**

Wir betrachten als primale Aufgabe:

$$\text{Minimiere} \quad x_1 + x_2 \quad \text{sodass} \quad x_1 + x_2 = 0 \quad \text{und} \quad x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

mit der eindeutigen Lösung $x^* = (0, 0)^\top$. Im zugehörigen Pfad-Problem (10.4) widersprechen sich jedoch $x_1 + x_2 = 0$ und $x > 0$, sodass (10.4) keine Lösung besitzt. (Wegen Satz 10.1 besitzen dann auch (10.5) und (10.6) keine Lösung.)

Wir untersuchen jetzt die Lösbarkeit von (10.4).

Definition 10.3 (Primal-dual zulässige Menge)**.**

Die Menge

$$\mathcal{F} := \{(x, \lambda, s) : Ax = b,\ A^\top \lambda + s = c,\ x \ge 0,\ s \ge 0\}$$

heißt die **(primal-dual) zulässige Menge** und

$$\mathcal{F}_0 := \{(x, \lambda, s) : Ax = b,\ A^\top \lambda + s = c,\ x > 0,\ s > 0\}$$

die **(primal-dual) strikt zulässige Menge**.

[46] Es geht auch ad hoc.

Wegen Satz 10.1 ist $\mathcal{F}_0 \neq \emptyset$ notwendig dafür, dass (10.4) und damit (10.5) und (10.6) Lösungen besitzen. Dies ist aber auch hinreichend:

Satz 10.4 (Existenz einer Lösung für das primale Barriere-Problem[47]).

Die strikt zulässige Menge $\mathcal{F}_0$ sei nichtleer. Dann besitzt das primale Barriere-Problem (10.5) für jedes $\tau > 0$ eine Lösung $x^{*(\tau)}$.[48] (Nach Satz 10.1 besitzen also auch (10.4) und (10.6) Lösungen.)

Beweis: Es seien $\tau > 0$ und ein $(x_0, \lambda_0, s_0) \in \mathcal{F}_0$ gegeben. Es gilt also

$$A^\top \lambda_0 + s_0 = c, \quad Ax_0 = b, \quad x_0 > 0, \quad s_0 > 0. \tag{$*$}$$

Wir bezeichnen mit

$$B^{(\tau)}(x) = c^\top x - \tau \sum_{i=1}^n \ln(x_i)$$

die Zielfunktion in (10.5). Wir werden zeigen, dass die (Sub-)Levelmenge

$$\mathcal{L}(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, \quad x \geq 0, \quad B^{(\tau)}(x) \leq B^{(\tau)}(x_0)\}$$

kompakt ist. (Nichtleer ist sie wegen $x_0 \in \mathcal{L}(x_0)$.) Das Barriere-Problem (10.5) ist daher äquivalent zur Minimierung der stetigen Funktion $B^{(\tau)}$ über der kompakten Menge $\mathcal{L}(x_0)$, besitzt also eine globale Lösung, vgl. Satz 1.7. Die eigentlich benötigte strengere Bedingung $x > 0$ in der Definition von $\mathcal{L}(x_0)$ ergibt sich automatisch aus $B^{(\tau)}(x) \leq B^{(\tau)}(x_0)$.

Offenbar ist $\mathcal{L}(x_0)$ abgeschlossen.[49] Für $x \in \mathcal{L}(x_0)$ folgt aus ($*$)

$$\begin{aligned} B^{(\tau)}(x) + \tau \sum_{i=1}^n \ln(x_i) &= c^\top x \\ &= c^\top x - \lambda_0^\top (Ax - b) \\ &= c^\top x - x^\top A^\top \lambda_0 + b^\top \lambda_0 \\ &= c^\top x - x^\top (c - s_0) + b^\top \lambda_0 \\ &= x^\top s_0 + b^\top \lambda_0. \end{aligned}$$

Daher gilt

$$\begin{aligned} & B^{(\tau)}(x) \leq B^{(\tau)}(x_0) \\ \Leftrightarrow \quad & x^\top s_0 + b^\top \lambda_0 - \tau \sum_{i=1}^n \ln(x_i) \leq B^{(\tau)}(x_0) \\ \Leftrightarrow \quad & \sum_{i=1}^n \big[x_i s_{0,i} - \tau \ln(x_i)\big] \leq B^{(\tau)}(x_0) - b^\top \lambda_0 =: \text{const} \end{aligned}$$

Die Funktionen

$$x_i \mapsto [x_i s_{0,i} - \tau \ln(x_i)]$$

sind auf $\mathbb{R}^+$ wegen $s_{0,i} > 0$ nach unten beschränkt und konvergieren gegen ∞ für $x_i \to \infty$. Daher ist $\mathcal{L}(x_0)$ auch beschränkt, also kompakt. □

[47]**Beachte:** (10.4) ist also nicht nur die Störung des Optimalitätssystems (10.3), sondern seinerseits das Optimalitätssystem für die gestörte Aufgabe (10.5) (und (10.5)).

[48]**Lies:** globales Minimum, denn (10.5) ist eine konvexe Aufgabe, vgl. Satz 11.15.

[49]als Schnitt von Urbildern abgeschlossener Mengen unter stetigen Funktionen

Folgerung 10.5 (Existenz des zentralen Pfades).

Die strikt zulässige Menge $\mathcal{F}_0$ sei nichtleer. Dann besitzen die ZPB (10.4) für jedes $\tau > 0$ eine Lösung $(x^{*(\tau)}, \lambda^{*(\tau)}, s^{*(\tau)})$. Dabei sind die (x, s)-Komponenten eindeutig bestimmt. Besitzt A vollen Zeilenrang ($\operatorname{rang}(A) = m$), so ist auch $\lambda^{*(\tau)}$ eindeutig.

Beweis: Nach Satz 10.4 besitzt das primale Barriere-Problem (10.5) für jedes $\tau > 0$ eine Lösung $x^{*(\tau)}$. Wegen Satz 10.1 existieren dann Vektoren $\lambda^{*(\tau)}$ und $s^{*(\tau)}$, sodass $(x^{*(\tau)}, \lambda^{*(\tau)}, s^{*(\tau)})$ eine Lösung von (10.4) ist.

Zur Eindeutigkeit: Das primale Barriere-Problem (10.5) besitzt eine strikt konvexe Zielfunktion (Definition 11.8), und die zulässige Menge

$$\{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, \quad x > 0\}$$

ist konvex. Daher ist $x^{*(\tau)}$ eindeutig bestimmt, siehe Satz 11.15. Aufgrund der Bedingungen $x_i^* s_i^* = \tau$ für $i = 1, \ldots, n$ ist damit auch $s^{*(\tau)}$ eindeutig bestimmt.

Besitzt A vollen Zeilenrang, dann ist $AA^\top \in \mathbb{R}^{m \times m}$ invertierbar, und aus $A^\top \lambda^{*(\tau)} + s^{*(\tau)} = c$ folgt

$$\lambda^{*(\tau)} = (AA^\top)^{-1} A (c - s^{*(\tau)}).$$

$\square$

Definition 10.6 (Strikt komplementäre Lösung).

Eine Lösung (x^*, λ^*, s^*) der Optimalitätsbedingungen (8.5) heißt **strikt komplementär**, wenn für alle $i = 1, \ldots, n$ entweder $x_i^* = 0$ oder $s_i^* = 0$ gilt.

Satz 10.7 (Konvergenz für $\tau \searrow 0$).

Die strikt zulässige Menge $\mathcal{F}_0$ sei nichtleer, und es gelte $\tau^{(k)} \searrow 0$. Es sei $(x^{(k)}, s^{(k)}, \lambda^{(k)})$ eine Lösung von (10.4) für $\tau = \tau^{(k)}$. Dann ist die Folge $\{(x^{(k)}, s^{(k)})\}$ beschränkt und besitzt daher eine konvergente Teilfolge. Jeder Häufungspunkt (Grenzwert einer Teilfolge) gehört zu einer strikt komplementären Lösung (x^*, λ^*, s^*) von (10.3).[50]

Beweis: Es sei $(x_0, \lambda_0, s_0) \in \mathcal{F}_0$. Es gilt

$$(x^{(k)} - x_0)^\top (s^{(k)} - s_0) = (x^{(k)} - x_0)^\top A^\top (\lambda_0 - \lambda^{(k)}) = (b - b)^\top (\lambda_0 - \lambda^{(k)}) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{x_0^\top}_{>0} s^{(k)} + x^{(k)\top} \underbrace{s_0}_{>0} = \underbrace{x^{(k)\top} s^{(k)}}_{=\tau^{(k)} n} + \underbrace{x_0^\top s_0}_{=:c>0}$$

$$\Rightarrow \quad 0 \le x_0^\top s^{(k)} + x^{(k)\top} s_0 = \tau^{(k)} n + c \le \bar{\tau}\, n + c \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \quad \{\|x^{(k)}\|\} \text{ und } \{\|s^{(k)}\|\} \text{ sind beschränkt.}$$

Also existieren konvergente Teilfolgen

$$x^{(k_\ell)} \to x^* \ge 0, \quad s^{(k_\ell)} \to s^* \ge 0,$$

[50] Nur solche kann man also überhaupt durch primal-duale IP-Verfahren erreichen.

und es gilt $Ax^{(k_\ell)} = b$, also auch $Ax^* = b$, sowie ${x^{(k_\ell)}}^\top s^{(k_\ell)} = \tau^{(k_\ell)}\, n \searrow 0$, also auch $(x^*)^\top s^* = 0$.

Die Folge $\{\lambda^{(k_\ell)}\}$ erfüllt $A^\top \lambda^{(k_\ell)} = c - s^{(k_\ell)}$, d. h., $c - s^{(k_\ell)} \in \operatorname{Bild}(A^\top)$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Da $\operatorname{Bild}(A^\top)$ als Unterraum abgeschlossen ist, liegt auch der Grenzwert $c - s^* \in \operatorname{Bild}(A^\top)$, d. h., es existiert λ^* mit $A^\top \lambda^* + s^* = c$.[51] Mit anderen Worten: (x^*, λ^*, s^*) erfüllt (8.5).

Zur strikten Komplementarität:

$$(x^{(k_\ell)} - x^*)^\top (s^{(k_\ell)} - s^*) = (x^{(k_\ell)} - x^*)^\top A^\top (\lambda^* - \lambda^{(k_\ell)}) = (b - b)^\top (\lambda^* - \lambda^{(k_\ell)}) = 0$$

$$\Rightarrow \quad (x^*)^\top s^{(k_\ell)} + {x^{(k_\ell)}}^\top s^* = \underbrace{{x^{(k_\ell)}}^\top s^{(k_\ell)}}_{=\tau^{(k_\ell)} n} + \underbrace{(x^*)^\top s^*}_{=0} = \tau^{(k_\ell)} n$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^n \frac{x_i^*}{x_i^{(k_\ell)}} + \sum_{i=1}^n \frac{s_i^*}{s_i^{(k_\ell)}} = n \quad \text{wegen } s_i^{(k_\ell)} = \frac{\tau^{(k_\ell)}}{x_i^{(k_\ell)}} \text{ und } x_i^{(k_\ell)} = \frac{\tau^{(k_\ell)}}{s_i^{(k_\ell)}}.$$

Die $2n$ Quotienten in den Summen sind jeweils entweder $= 0$ oder konvergieren für $\ell \to \infty$ gegen 1. Daraus folgt entweder $x_i^* = 0$ oder $s_i^* = 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$. $\square$

[51] D. h., λ^* ist nicht notwendig Grenzwert der Folge $\{\lambda^{(k_\ell)}\}$, sondern wird konstruiert.