Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. R. Herzog, J. Blechschmidt, A. Schäfer

Chemnitz, 5. März 2015

Grundlagen der Optimierung

Aufgabenblatt 1

Hinweis: Versuchen Sie, die nachfolgenden Aufgaben so gut wie möglich zu bearbeiten. Sollten Sie an einer Stelle nicht weiterkommen, so geben Sie ersatzweise die benötigten Definitionen an und versuchen Sie, sich den Sachverhalt an einem Beispiel (oder auch Gegenbeispiel) zu veranschaulichen. Bei den gefragten Beweisskizzen dürfen Hilfsresultate (z. B. vorhergehende Lemmas) aus der Vorlesung verwendet werden.

Aufgabe 1: Beispiele für CQs

Zeige, dass für das Optimierungsproblem

$$\begin{array}{ll} \min & x_1^2 + (x_2+1)^2 \\ \text{sodass} & -x_1^3 - x_2 \leq 0 \\ & -x_2 \leq 0 \end{array}$$

im Nullpunkt $x^* = (0,0)$ die Bedingung MFCQ erfüllt ist, aber LICQ nicht erfüllt ist.

Aufgabe 2: Notwendige und hinreichende Bedingungen in der freien Optimierung

(a) Formulieren Sie notwendige und hinreichende Optimalitätsbedingungen 1. bzw. 2. Ordnung für das folgende Optimierungsproblem:

$$\text{Minimiere} \quad f(x) \quad \text{über } x \in \mathbb{R}^n,$$

wobei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar ist.

(b) Geben Sie eine Beweisskizze an.

Aufgabe 3: Numerisches Verfahren

Wie heißt der folgende Algorithmus? Welche Probleme lassen sich damit lösen?

Algorithmus:

Finde einen zulässigen Basisvektor x von P mit zugehöriger Basis B und setze $N := \{1, \dots, n\} \setminus B$ und $k := 0$
Berechne
$$\widetilde{c}_N := c_N - A_N^\top A_B^{-\top} c_B$$
if $\widetilde{c}_N \geq 0$ **then**
    x ist eine Lösung des Problems, **STOP**
else
    Wähle $r \in N$ mit $\widetilde{c}_r < 0$

7: Berechne $d_B := A_B^{-1}\, a_r$

8: **if** $d_B \leq 0$ **then**

9: Das Problem ist unbeschränkt, **STOP**

10: **else**

11: Bestimme $\hat{t} \geq 0$ und $s \in B$ gemäß

$$\hat{t} := \min_{\substack{i \in B \\ d_i > 0}} \frac{x_i}{d_i} = \frac{x_s}{d_s}$$

12: Setze

$$x_i^+ := \begin{cases} x_i - \hat{t}\, d_i & \text{für } i \in B,\ i \neq s, \\ \hat{t} & \text{für } i = r, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

13: Setze $B^+ := \big(B \cup \{r\}\big) \setminus \{s\}$

14: Setze $N^+ := \{1, \ldots, n\} \setminus B^+$

15: Setze $k := k + 1$, $x := x^+$, $B := B^+$, $N := N^+$

16: **end if**

17: **end if**

18: Gehe zu 2:

Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. R. Herzog, J. Blechschmidt, A. Schäfer

Chemnitz, 5. März 2015

Grundlagen der Optimierung

Aufgabenblatt 2

Hinweis: Versuchen Sie, die nachfolgenden Aufgaben so gut wie möglich zu bearbeiten. Sollten Sie an einer Stelle nicht weiterkommen, so geben Sie ersatzweise die benötigten Definitionen an und versuchen Sie, sich den Sachverhalt an einem Beispiel (oder auch Gegenbeispiel) zu veranschaulichen. Bei den gefragten Beweisskizzen dürfen Hilfsresultate (z. B. vorhergehende Lemmas) aus der Vorlesung verwendet werden.

Aufgabe 1: Beispiele für konvexe Optimierungsprobleme

Es seien $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex ($i = 1, \ldots, m$) und $h_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ affin-linear ($j = 1, \ldots, p$) gegeben und

$$C := \{x \in \mathbb{R}^n \, : \, g_i(x) \le 0 \ (i = 1, \ldots, m), \ h_j(x) = 0 \ (j = 1, \ldots, p)\}.$$

Zeige, dass C eine konvexe Menge ist und folgere, dass jedes lineare Optimierungsproblem (in kanonischer Form und in Standardform) ein konvexes Optimierungsproblem ist.

Aufgabe 2: Notwendige und hinreichende Bedingungen in der freien Optimierung

(a) Formulieren Sie notwendige und hinreichende Optimalitätsbedingungen 1. bzw. 2. Ordnung für das folgende Optimierungsproblem:

$$\text{Minimiere} \quad f(x) \quad \text{über } x \in \mathbb{R}^n,$$

wobei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar ist.

(b) Geben Sie eine Beweisskizze an.

Aufgabe 3: Numerisches Verfahren

Wie heißt der folgende Algorithmus? Welche Probleme lassen sich damit lösen?

Algorithmus:

Wähle $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, $\sigma \in (0,1)$, $\beta \in (0,1)$ und setze $k := 0$
while Abbruchkriterium nicht erfüllt **do**
  Setze $d^{(k)} := -\nabla f(x^{(k)})$
  Bestimme $t^{(k)} > 0$, sodass

$$f(x^{(k)} + t^{(k)}\, d^{(k)}) \le f(x^{(k)}) + \sigma\, t^{(k)}\, \nabla f(x^{(k)})^\top d^{(k)}$$

  gilt
  Setze $x^{(k+1)} := x^{(k)} + t^{(k)}\, d^{(k)}$ und $k := k + 1$
end while

Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. R. Herzog, J. Blechschmidt, A. Schäfer

Chemnitz, 5. März 2015

Grundlagen der Optimierung
Aufgabenblatt 3

Hinweis: Versuchen Sie, die nachfolgenden Aufgaben so gut wie möglich zu bearbeiten. Sollten Sie an einer Stelle nicht weiterkommen, so geben Sie ersatzweise die benötigten Definitionen an und versuchen Sie, sich den Sachverhalt an einem Beispiel (oder auch Gegenbeispiel) zu veranschaulichen. Bei den gefragten Beweisskizzen dürfen Hilfsresultate (z. B. vorhergehende Lemmas) aus der Vorlesung verwendet werden.

Aufgabe 1: $\mathcal{T}_X(x_0)$ und $\mathcal{T}_X^{\text{lin}}(x_0)$ an einem Beispiel

In den folgenden zwei Teilaufgaben wird jeweils eine zulässige Menge X durch $X = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \le 0\}$ beschrieben. Gib jeweils für den gegebenen Punkt x_0 die Menge der aktiven Indizes $\mathcal{A}(x_0)$, den Tangentialkegel $\mathcal{T}_X(x_0)$ und den linearisierten Tangentialkegel $\mathcal{T}_X^{\text{lin}}(x_0)$ an. Fertige je eine Skizze an.

(a)
$$g(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 1 \\ 1 - x_1 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad x_0 = (1,\, 0)^\top$$

(b)
$$g(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 1 \\ 1 - x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad x_0 = (1,\, 0)^\top$$

Aufgabe 2: Existenz einer Lösung bei LPs

Geben Sie ein lineares Programm (LP) in Normalform an und skizzieren Sie den Beweis des folgenden Satzes.

Satz. *Wir betrachten ein LP in Normalform mit zulässiger Menge P. Ist der Optimalwert endlich, so besitzt das LP mindestens eine Lösung.*

Aufgabe 3: Numerisches Verfahren

Wie heißt der folgende Algorithmus? Welche Probleme lassen sich damit lösen?

Algorithmus:

Wähle $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ und setze $k := 0$
while Abbruchkriterium nicht erfüllt **do**
  Setze $d^{(k)} := -\nabla f(x^{(k)})$
  Bestimme $t^{(k)}$, sodass
$$f(x^{(k)} + t^{(k)}\, d^{(k)}) = \min_{t \ge 0} f(x^{(k)} + t\, d^{(k)})$$
  gilt
  Setze $x^{(k+1)} := x^{(k)} + t^{(k)}\, d^{(k)}$ und $k := k + 1$
end while

Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. R. Herzog, J. Blechschmidt, A. Schäfer

Chemnitz, 5. März 2015

Grundlagen der Optimierung

Aufgabenblatt 4

Hinweis: Versuchen Sie, die nachfolgenden Aufgaben so gut wie möglich zu bearbeiten. Sollten Sie an einer Stelle nicht weiterkommen, so geben Sie ersatzweise die benötigten Definitionen an und versuchen Sie, sich den Sachverhalt an einem Beispiel (oder auch Gegenbeispiel) zu veranschaulichen. Bei den gefragten Beweisskizzen dürfen Hilfsresultate (z. B. vorhergehende Lemmas) aus der Vorlesung verwendet werden.

Aufgabe 1: Exakte Liniensuche für eine quadratische Funktion

Die Vorschrift der exakten Liniensuche lautet:

„Bestimme t_{min} so, dass $f(x + t_{\text{min}} d) = \min_{t \geq 0} f(x + t\, d)$ gilt.“

Berechne t_{min} für die quadratische Funktion

$$f(x) = \frac{1}{2} x^\top Q\, x + c^\top x + \gamma$$

mit einer symmetrischen, positiv definiten Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $c \in \mathbb{R}^n$, $\gamma \in \mathbb{R}$ und einer gegebenen Richtung d.

Aufgabe 2: Existenz einer Lösung bei LPs

Geben Sie ein lineares Programm (LP) in Normalform an und skizzieren Sie den Beweis des folgenden Satzes.

Satz. *Wir betrachten ein LP in Normalform mit zulässiger Menge P. Ist der Optimalwert endlich, so besitzt das LP mindestens eine Lösung.*

Aufgabe 3: Numerisches Verfahren

Wie heißt der folgende Algorithmus? Welche Probleme lassen sich damit lösen?

Algorithmus:

Wähle $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ und setze $k := 0$
while Abbruchkriterium nicht erfüllt **do**
    Löse das lineare Gleichungssystem $F'(x^{(k)})\, d^{(k)} := -F(x^{(k)})$
    Setze $x^{(k+1)} := x^{(k)} + d^{(k)}$ und $k := k + 1$
end while

Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. R. Herzog, J. Blechschmidt, A. Schäfer

Chemnitz, 5. März 2015

Grundlagen der Optimierung
Aufgabenblatt 5

Hinweis: Versuchen Sie, die nachfolgenden Aufgaben so gut wie möglich zu bearbeiten. Sollten Sie an einer Stelle nicht weiterkommen, so geben Sie ersatzweise die benötigten Definitionen an und versuchen Sie, sich den Sachverhalt an einem Beispiel (oder auch Gegenbeispiel) zu veranschaulichen. Bei den gefragten Beweisskizzen dürfen Hilfsresultate (z. B. vorhergehende Lemmas) aus der Vorlesung verwendet werden.

Aufgabe 1: Exakte Liniensuche für eine quadratische Funktion

Die Vorschrift der exakten Liniensuche lautet:

„Bestimme $t_{\min}$ so, dass $f(x + t_{\min} d) = \min\limits_{t \geq 0} f(x + t\, d)$ gilt.“

Berechne $t_{\min}$ für die quadratische Funktion

$$f(x) = \frac{1}{2} x^\top Q\, x + c^\top x + \gamma$$

mit einer symmetrischen, positiv definiten Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $c \in \mathbb{R}^n$, $\gamma \in \mathbb{R}$ und einer gegebenen Richtung d.

Aufgabe 2: Ecken sind zulässige Basisvektoren

(a) Geben Sie die Definiton eines Polyeders P in Normalform an.

(b) Vervollständigen Sie die Voraussetzungen des folgenden Satzes und skizzieren Sie dessen Beweis.

Satz. *Es sei P ein Polyeder in Normalform und .... Dann sind äquivalent:*

(a) x ist eine Ecke von P.

(b) x ist zulässiger Basisvektor von P zu einer geeigneten Basis.

Aufgabe 3: Numerisches Verfahren

Wie heißt der folgende Algorithmus? Welche Probleme lassen sich damit lösen?

Algorithmus:

Wähle $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, $\sigma \in (0,1)$, $\beta \in (0,1)$, $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch positiv definit und setze $k := 0$
while Abbruchkriterium nicht erfüllt **do**
    Setze $d^{(k)} := -M^{-1} \nabla f(x^{(k)})$
    Bestimme $t^{(k)} > 0$, sodass

$$f(x^{(k)} + t^{(k)}\, d^{(k)}) \leq f(x^{(k)}) + \sigma\, t^{(k)}\, \nabla f(x^{(k)})^\top d^{(k)}$$

    gilt
    Setze $x^{(k+1)} := x^{(k)} + t^{(k)}\, d^{(k)}$ und $k := k + 1$
end while

Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. R. Herzog, J. Blechschmidt, A. Schäfer

Chemnitz, 5. März 2015

Grundlagen der Optimierung
Aufgabenblatt 6

Hinweis: Versuchen Sie, die nachfolgenden Aufgaben so gut wie möglich zu bearbeiten. Sollten Sie an einer Stelle nicht weiterkommen, so geben Sie ersatzweise die benötigten Definitionen an und versuchen Sie, sich den Sachverhalt an einem Beispiel (oder auch Gegenbeispiel) zu veranschaulichen. Bei den gefragten Beweisskizzen dürfen Hilfsresultate (z. B. vorhergehende Lemmas) aus der Vorlesung verwendet werden.

Aufgabe 1: Beispiele für CQs

Zeige, dass für das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{sodass} \quad & x_1 \cdot x_2 = 0 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

im Nullpunkt $x^* = (0,0)$ die Guignard-CQ, aber nicht die Abadie-CQ erfüllt ist.

Aufgabe 2: Ecken sind zulässige Basisvektoren

(a) Geben Sie die Definiton eines Polyeders P in Normalform an.

(b) Vervollständigen Sie die Voraussetzungen des folgenden Satzes und skizzieren Sie dessen Beweis.

Satz. *Es sei P ein Polyeder in Normalform und .... Dann sind äquivalent:*

(a) x ist eine Ecke von P.

(b) x ist zulässiger Basisvektor von P zu einer geeigneten Basis.

Aufgabe 3: Numerisches Verfahren

Wie heißt der folgende Algorithmus? Welche Probleme lassen sich damit lösen?

Algorithmus:

Wähle $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch positiv definit und setze $k := 0$
while Abbruchkriterium nicht erfüllt **do**
    Setze $d^{(k)} := -M^{-1} \nabla f(x^{(k)})$
    Bestimme $t^{(k)}$, sodass

$$f(x^{(k)} + t^{(k)}\, d^{(k)}) = \min_{t \geq 0} f(x^{(k)} + t\, d^{(k)})$$

    gilt
    Setze $x^{(k+1)} := x^{(k)} + t^{(k)}\, d^{(k)}$ und $k := k + 1$
end while

Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. R. Herzog, J. Blechschmidt, A. Schäfer

Chemnitz, 5. März 2015

Grundlagen der Optimierung

Aufgabenblatt 7

Hinweis: Versuchen Sie, die nachfolgenden Aufgaben so gut wie möglich zu bearbeiten. Sollten Sie an einer Stelle nicht weiterkommen, so geben Sie ersatzweise die benötigten Definitionen an und versuchen Sie, sich den Sachverhalt an einem Beispiel (oder auch Gegenbeispiel) zu veranschaulichen. Bei den gefragten Beweisskizzen dürfen Hilfsresultate (z. B. vorhergehende Lemmas) aus der Vorlesung verwendet werden.

Aufgabe 1: KKT-Bedingungen für quadratische Optimierungsprobleme

Wir betrachten die folgende quadratische Optimierungsaufgabe mit linearen Gleichungsnebenbedingungen:

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & \frac{1}{2} x^\top Q x + c^\top x \quad \text{über } x \in \mathbb{R}^n \\ \text{sodass} \quad & B\,x = d. \end{aligned}$$

Dabei sei $Q^\top = Q \succ 0$, und die Matrix $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ habe vollen Zeilenrang.

(a) Stelle die KKT-Bedingungen auf und formuliere diese als lineares Gleichungssystem.

(b) Ist der Lagrange-Multiplikator eindeutig bestimmt?

Aufgabe 2: Hauptsatz der linearen Optimierung

Formulieren Sie den Hauptsatz der linearen Optimierung und skizzieren Sie dessen Beweis.

Aufgabe 3: Numerisches Verfahren

Wie heißt der folgende Algorithmus? Welche Probleme lassen sich damit lösen?

Algorithmus:

Wähle $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ und setze $k := 0$
while Abbruchkriterium nicht erfüllt **do**
  Löse das lineare Gleichungssystem $\nabla^2 f(x^{(k)})\, d^{(k)} := -\nabla f(x^{(k)})$
  Setze $x^{(k+1)} := x^{(k)} + d^{(k)}$ und $k := k + 1$
end while

Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. R. Herzog, J. Blechschmidt, A. Schäfer

Chemnitz, 5. März 2015

Grundlagen der Optimierung
Aufgabenblatt 8

Hinweis: Versuchen Sie, die nachfolgenden Aufgaben so gut wie möglich zu bearbeiten. Sollten Sie an einer Stelle nicht weiterkommen, so geben Sie ersatzweise die benötigten Definitionen an und versuchen Sie, sich den Sachverhalt an einem Beispiel (oder auch Gegenbeispiel) zu veranschaulichen. Bei den gefragten Beweisskizzen dürfen Hilfsresultate (z. B. vorhergehende Lemmas) aus der Vorlesung verwendet werden.

Aufgabe 1: Grafische Darstellung einiger Polarkegel

Stellen Sie die Polarkegel von folgenden Mengen dar:

(a) $M_1 = \{(-1,-1)\} \cup \{(1,1)\}$

(b) $M_2 = \operatorname{conv}(\{(1,2),(-1,2),(0,1)\})$

(c) $M_3 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ \|x\|_2^2 \le 1\}$

Aufgabe 2: Hauptsatz der linearen Optimierung

Formulieren Sie den Hauptsatz der linearen Optimierung und skizzieren Sie dessen Beweis.

Aufgabe 3: Numerisches Verfahren

Wie heißt der folgende Algorithmus? Welche Probleme lassen sich damit lösen?

Algorithmus:

Finde einen zulässigen Basisvektor x von P mit zugehöriger Basis B und setze $N := \{1,\dots,n\} \setminus B$ und $k := 0$

Berechne

$$\widetilde{c}_N := c_N - A_N^\top A_B^{-\top} c_B$$

if $\widetilde{c}_N \ge 0$ **then**

  x ist eine Lösung des Problems, **STOP**

else

  Wähle $r \in N$ mit $\widetilde{c}_r < 0$

  Berechne $d_B := A_B^{-1}\, a_r$

  if $d_B \le 0$ **then**

    Das Problem ist unbeschränkt, **STOP**

  else

    Bestimme $\hat{t} \ge 0$ und $s \in B$ gemäß

$$\hat{t} := \min_{\substack{i \in B \\ d_i > 0}} \frac{x_i}{d_i} = \frac{x_s}{d_s}$$

12: Setze

$$x_i^+ := \begin{cases} x_i - \hat{t}\, d_i & \text{für } i \in B,\ i \neq s, \\ \hat{t} & \text{für } i = r, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

13: Setze $B^+ := \big(B \cup \{r\}\big) \setminus \{s\}$

14: Setze $N^+ := \{1, \ldots, n\} \setminus B^+$

15: Setze $k := k + 1$, $x := x^+$, $B := B^+$, $N := N^+$

16: **end if**

17: **end if**

18: Gehe zu 2:

Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. R. Herzog, J. Blechschmidt, A. Schäfer

Chemnitz, 5. März 2015

Grundlagen der Optimierung

Aufgabenblatt 9

Hinweis: Versuchen Sie, die nachfolgenden Aufgaben so gut wie möglich zu bearbeiten. Sollten Sie an einer Stelle nicht weiterkommen, so geben Sie ersatzweise die benötigten Definitionen an und versuchen Sie, sich den Sachverhalt an einem Beispiel (oder auch Gegenbeispiel) zu veranschaulichen. Bei den gefragten Beweisskizzen dürfen Hilfsresultate (z. B. vorhergehende Lemmas) aus der Vorlesung verwendet werden.

Aufgabe 1: Menge aller Minoranten am Beispiel

Sei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ (x-1)^2 - 1, & x < 0. \end{cases}$$

Skizziere die Funktion f und beschreibe jeweils die Menge aller linearen Minoranten, die f in den Punkten $x_0 = 0$ beziehungsweise $x_0 = 1$ stützen.

Aufgabe 2: Simplex-Algorithmus

Wir betrachten ein lineares Programm (LP) in Normalform.

(a) Geben Sie ein LP in Normalform an.

(b) Leiten Sie einen Schritt des Simplexalgorithmus her. An welchen Stellen und aus welchen Gründen kann der Algorithmus abbrechen?

Hinweis: Die reduzierten Kosten sind in der Notation der Vorlesung durch $\widetilde{c}_N := c_N - A_N^\top A_B^{-\top} c_B$ gegeben.

Aufgabe 3: Numerisches Verfahren

Wie heißt der folgende Algorithmus? Welche Probleme lassen sich damit lösen?

Algorithmus:

Wähle $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, $\sigma \in (0,1)$, $\beta \in (0,1)$ und setze $k := 0$
while Abbruchkriterium nicht erfüllt **do**
    Setze $d^{(k)} := -\nabla f(x^{(k)})$
    Bestimme $t^{(k)} > 0$, sodass

$$f(x^{(k)} + t^{(k)}\, d^{(k)}) \leq f(x^{(k)}) + \sigma\, t^{(k)}\, \nabla f(x^{(k)})^\top d^{(k)}$$

    gilt
    Setze $x^{(k+1)} := x^{(k)} + t^{(k)}\, d^{(k)}$ und $k := k+1$
end while

Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. R. Herzog, J. Blechschmidt, A. Schäfer

Chemnitz, 5. März 2015

Grundlagen der Optimierung
Aufgabenblatt 10

Hinweis: Versuchen Sie, die nachfolgenden Aufgaben so gut wie möglich zu bearbeiten. Sollten Sie an einer Stelle nicht weiterkommen, so geben Sie ersatzweise die benötigten Definitionen an und versuchen Sie, sich den Sachverhalt an einem Beispiel (oder auch Gegenbeispiel) zu veranschaulichen. Bei den gefragten Beweisskizzen dürfen Hilfsresultate (z. B. vorhergehende Lemmas) aus der Vorlesung verwendet werden.

Aufgabe 1: Grafische Darstellung von $K(M,x)$ und $\mathcal{N}_M(x)$

Stellen Sie die Kegel der zulässigen Richtungen $K(M,x)$ und die Normalenkegel $\mathcal{N}_M(x)$ für folgende Mengen dar:

(a) $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ im Punkt $x = (1,-1)^\top$,

(b) $M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x^3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \right\}$
in den Punkten $x_1 = (0,0)^\top$ und $x_2 = (-1,-1)^\top$,

Aufgabe 2: Simplex-Algorithmus

Wir betrachten ein lineares Programm (LP) in Normalform.

(a) Geben Sie ein LP in Normalform an.

(b) Leiten Sie einen Schritt des Simplexalgorithmus her. An welchen Stellen und aus welchen Gründen kann der Algorithmus abbrechen?

Hinweis: Die reduzierten Kosten sind in der Notation der Vorlesung durch $\widetilde{c}_N := c_N - A_N^\top A_B^{-\top} c_B$ gegeben.

Aufgabe 3: Numerisches Verfahren

Wie heißt der folgende Algorithmus? Welche Probleme lassen sich damit lösen?

Algorithmus:

1: Wähle $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ und setze $k := 0$
2: **while** Abbruchkriterium nicht erfüllt **do**
3: Setze $d^{(k)} := -\nabla f(x^{(k)})$
4: Bestimme $t^{(k)}$, sodass

$$f(x^{(k)} + t^{(k)}\, d^{(k)}) = \min_{t \geq 0} f(x^{(k)} + t\, d^{(k)})$$

gilt
5: Setze $x^{(k+1)} := x^{(k)} + t^{(k)}\, d^{(k)}$ und $k := k + 1$
6: **end while**

Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. R. Herzog, J. Blechschmidt, A. Schäfer

Chemnitz, 5. März 2015

Grundlagen der Optimierung
Aufgabenblatt 11

Hinweis: Versuchen Sie, die nachfolgenden Aufgaben so gut wie möglich zu bearbeiten. Sollten Sie an einer Stelle nicht weiterkommen, so geben Sie ersatzweise die benötigten Definitionen an und versuchen Sie, sich den Sachverhalt an einem Beispiel (oder auch Gegenbeispiel) zu veranschaulichen. Bei den gefragten Beweisskizzen dürfen Hilfsresultate (z. B. vorhergehende Lemmas) aus der Vorlesung verwendet werden.

Aufgabe 1: Beispiele konvexer Mengen und Kegel

Seien

$$\begin{aligned} A_1 &= \{f \in C([0,1],\mathbb{R}) : \; f(0) = f(1)\}, \\ A_2 &= \{f \in C([0,1],\mathbb{R}) : \; f(0) = 2\}. \end{aligned}$$

Prüfen Sie, ob die Mengen A_i konvex, Kegel oder sogar konvexe Kegel sind.
Hinweis: $C([0,1],\mathbb{R})$ bezeichnet die Menge der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[0,1]$ mit Werten in $\mathbb{R}$.

Aufgabe 2: Schwache und starke Dualität

(a) Formulieren Sie ein lineares Programm (LP) in Normalform (primales LP) und geben Sie das zugehörige duale LP an.

(b) Was steckt hinter dem Begriff der **schwachen Dualität**? Beweisen Sie die diesen Zusammenhang.

(c) Wie hilft dieser Zusammenhang bei der Erkennung von Lösungen für das primale und duale Problem?

Aufgabe 3: Numerisches Verfahren

Wie heißt der folgende Algorithmus? Welche Probleme lassen sich damit lösen?

Algorithmus:

Wähle $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch positiv definit und setze $k := 0$
while Abbruchkriterium nicht erfüllt **do**
  Setze $d^{(k)} := -M^{-1} \nabla f(x^{(k)})$
  Bestimme $t^{(k)}$, sodass

$$f(x^{(k)} + t^{(k)}\, d^{(k)}) = \min_{t \geq 0} f(x^{(k)} + t\, d^{(k)})$$

  gilt
  Setze $x^{(k+1)} := x^{(k)} + t^{(k)}\, d^{(k)}$ und $k := k + 1$
end while

Technische Universität Chemnitz — Chemnitz, 5. März 2015
Prof. Dr. R. Herzog, J. Blechschmidt, A. Schäfer

Grundlagen der Optimierung
Aufgabenblatt 12

Hinweis: Versuchen Sie, die nachfolgenden Aufgaben so gut wie möglich zu bearbeiten. Sollten Sie an einer Stelle nicht weiterkommen, so geben Sie ersatzweise die benötigten Definitionen an und versuchen Sie, sich den Sachverhalt an einem Beispiel (oder auch Gegenbeispiel) zu veranschaulichen. Bei den gefragten Beweisskizzen dürfen Hilfsresultate (z. B. vorhergehende Lemmas) aus der Vorlesung verwendet werden.

Aufgabe 1: Beispiele konvexer Mengen und Kegel

Seien

$$A_1 = \{f \in C([0,1], \mathbb{R}) :\ f(0) = f(1)\},$$
$$A_2 = \{f \in C([0,1], \mathbb{R}) :\ f(0) \neq 0\}$$

Prüfen Sie, ob die Mengen A_i konvex, Kegel oder sogar konvexe Kegel sind.
Hinweis: $C([0,1], \mathbb{R})$ bezeichnet die Menge der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[0,1]$ mit Werten in $\mathbb{R}$.

Aufgabe 2: Schwache und starke Dualität

(a) Formulieren Sie ein lineares Programm (LP) in Normalform (primales LP) und geben Sie das zugehörige duale LP an.

(b) Was steckt hinter dem Begriff der **schwachen Dualität**? Beweisen Sie die diesen Zusammenhang.

(c) Wie hilft dieser Zusammenhang bei der Erkennung von Lösungen für das primale und duale Problem?

Aufgabe 3: Numerisches Verfahren

Wie heißt der folgende Algorithmus? Welche Probleme lassen sich damit lösen?

Algorithmus:

Wähle $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, $\sigma \in (0,1)$, $\beta \in (0,1)$, $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch positiv definit und setze $k := 0$
while Abbruchkriterium nicht erfüllt **do**
  Setze $d^{(k)} := -M^{-1} \nabla f(x^{(k)})$
  Bestimme $t^{(k)} > 0$, sodass

$$f(x^{(k)} + t^{(k)}\, d^{(k)}) \leq f(x^{(k)}) + \sigma\, t^{(k)}\, \nabla f(x^{(k)})^\top d^{(k)}$$

  gilt
  Setze $x^{(k+1)} := x^{(k)} + t^{(k)}\, d^{(k)}$ und $k := k + 1$
end while

Technische Universität Chemnitz — Chemnitz, 5. März 2015
Prof. Dr. R. Herzog, J. Blechschmidt, A. Schäfer

Grundlagen der Optimierung
Aufgabenblatt 13

Hinweis: Versuchen Sie, die nachfolgenden Aufgaben so gut wie möglich zu bearbeiten. Sollten Sie an einer Stelle nicht weiterkommen, so geben Sie ersatzweise die benötigten Definitionen an und versuchen Sie, sich den Sachverhalt an einem Beispiel (oder auch Gegenbeispiel) zu veranschaulichen. Bei den gefragten Beweisskizzen dürfen Hilfsresultate (z. B. vorhergehende Lemmas) aus der Vorlesung verwendet werden.

Aufgabe 1: Einige konvexe Kegel

Bestätigen Sie, dass folgende Mengen konvexe Kegel sind.

(a) abgeschlossener Orthant $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0\}$

(b) Lorentzkegel $K = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \|x\|_2 \leq t\}$

Aufgabe 2: Mögliche primal-duale Situationen

(a) Formulieren Sie ein lineares Programm (LP) in Normalform (primales LP) und geben Sie das zugehörige duale LP an.

(b) Welche der folgenden Situationen können für primal-duale Paare auftreten? Begründen Sie ihre Wahl.

	duales LP		
primales LP	lösbar $d^* \in \mathbb{R}$	unbeschränkt $d^* = \infty$	unzulässig $d^* = -\infty$
lösbar $f^* \in \mathbb{R}$			
unbeschränkt $f^* = -\infty$			
unzulässig $f^* = \infty$			

Aufgabe 3: Numerisches Verfahren

Wie heißt der folgende Algorithmus? Welche Probleme lassen sich damit lösen?

Algorithmus:

1: Wähle $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ und setze $k := 0$

while Abbruchkriterium nicht erfüllt **do**
  Löse das lineare Gleichungssystem $F'(x^{(k)})\,d^{(k)} := -F(x^{(k)})$
  Setze $x^{(k+1)} := x^{(k)} + d^{(k)}$ und $k := k+1$
end while

Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. R. Herzog, J. Blechschmidt, A. Schäfer

Chemnitz, 5. März 2015

Grundlagen der Optimierung
Aufgabenblatt 14

Hinweis: Versuchen Sie, die nachfolgenden Aufgaben so gut wie möglich zu bearbeiten. Sollten Sie an einer Stelle nicht weiterkommen, so geben Sie ersatzweise die benötigten Definitionen an und versuchen Sie, sich den Sachverhalt an einem Beispiel (oder auch Gegenbeispiel) zu veranschaulichen. Bei den gefragten Beweisskizzen dürfen Hilfsresultate (z. B. vorhergehende Lemmas) aus der Vorlesung verwendet werden.

Aufgabe 1: Gradientenverfahren mit exakter Liniensuche am Beispiel

Wir betrachten das Problem

$$\text{Minimiere} \quad x^2 + (y-3)^2.$$

Bestimmen Sie die ersten zwei Iterierten des Gradientenverfahrens mit Startpunkt $(x_0, y_0) = (0, 0)$ und exakter Liniensuche.

Aufgabe 2: Mögliche primal-duale Situationen

(a) Formulieren Sie ein lineares Programm (LP) in Normalform (primales LP) und geben Sie das zugehörige duale LP an.

(b) Welche der folgenden Situationen können für primal-duale Paare auftreten? Begründen Sie ihre Wahl.

	duales LP		
primales LP	lösbar $d^* \in \mathbb{R}$	unbeschränkt $d^* = \infty$	unzulässig $d^* = -\infty$
lösbar $f^* \in \mathbb{R}$			
unbeschränkt $f^* = -\infty$			
unzulässig $f^* = \infty$			

Aufgabe 3: Numerisches Verfahren

Wie heißt der folgende Algorithmus? Welche Probleme lassen sich damit lösen?

Algorithmus:

1: Finde einen zulässigen Basisvektor x von P mit zugehöriger Basis B und setze $N := \{1, \dots, n\} \setminus B$ und $k := 0$

2: Berechne
$$\widetilde{c}_N := c_N - A_N^\top A_B^{-\top} c_B$$

3: **if** $\widetilde{c}_N \geq 0$ **then**

4: x ist eine Lösung des Problems, **STOP**

5: **else**

6: Wähle $r \in N$ mit $\widetilde{c}_r < 0$

7: Berechne $d_B := A_B^{-1}\, a_r$

8: **if** $d_B \leq 0$ **then**

9: Das Problem ist unbeschränkt, **STOP**

10: **else**

11: Bestimme $\hat{t} \geq 0$ und $s \in B$ gemäß
$$\hat{t} := \min_{\substack{i \in B \\ d_i > 0}} \frac{x_i}{d_i} = \frac{x_s}{d_s}$$

12: Setze
$$x_i^+ := \begin{cases} x_i - \hat{t}\, d_i & \text{für } i \in B,\ i \neq s, \\ \hat{t} & \text{für } i = r, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

13: Setze $B^+ := \big(B \cup \{r\}\big) \setminus \{s\}$

14: Setze $N^+ := \{1, \dots, n\} \setminus B^+$

15: Setze $k := k + 1$, $x := x^+$, $B := B^+$, $N := N^+$

16: **end if**

17: **end if**

18: Gehe zu 2:

Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. R. Herzog, J. Blechschmidt, A. Schäfer

Chemnitz, 5. März 2015

Grundlagen der Optimierung

Aufgabenblatt 15

Hinweis: Versuchen Sie, die nachfolgenden Aufgaben so gut wie möglich zu bearbeiten. Sollten Sie an einer Stelle nicht weiterkommen, so geben Sie ersatzweise die benötigten Definitionen an und versuchen Sie, sich den Sachverhalt an einem Beispiel (oder auch Gegenbeispiel) zu veranschaulichen. Bei den gefragten Beweisskizzen dürfen Hilfsresultate (z. B. vorhergehende Lemmas) aus der Vorlesung verwendet werden.

Aufgabe 1: KKT-Bedingungen bei Box-Beschränkungen

Wir betrachten das folgende Optimierungsproblem mit Box-Beschränkungen

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & f(x) && \text{über } x \in \mathbb{R}^n \\ \text{sodass} \quad & a \le g(x) \le b \\ \text{und} \quad & h(x) = 0. \end{aligned}$$

Hierbei sind $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ stetig differenzierbar und $a, b \in \mathbb{R}^m$ mit $a \le b$. Geben Sie die zugehörigen KKT-Bedingungen an.

Aufgabe 2: Hauptsatz der konvexen Optimierung

Formulieren Sie den Hauptsatz der konvexen Optimierung und skizzieren Sie dessen Beweis.

Aufgabe 3: Numerisches Verfahren

Wie heißt der folgende Algorithmus? Welche Probleme lassen sich damit lösen?

Algorithmus:

1: Wähle $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, $\sigma \in (0, 1)$, $\beta \in (0, 1)$ und setze $k := 0$
2: **while** Abbruchkriterium nicht erfüllt **do**
3: Setze $d^{(k)} := -\nabla f(x^{(k)})$
4: Bestimme $t^{(k)} > 0$, sodass

$$f(x^{(k)} + t^{(k)}\, d^{(k)}) \le f(x^{(k)}) + \sigma\, t^{(k)}\, \nabla f(x^{(k)})^\top d^{(k)}$$

gilt
5: Setze $x^{(k+1)} := x^{(k)} + t^{(k)}\, d^{(k)}$ und $k := k + 1$
6: **end while**

Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. R. Herzog, J. Blechschmidt, A. Schäfer

Chemnitz, 5. März 2015

Grundlagen der Optimierung

Aufgabenblatt 16

Hinweis: Versuchen Sie, die nachfolgenden Aufgaben so gut wie möglich zu bearbeiten. Sollten Sie an einer Stelle nicht weiterkommen, so geben Sie ersatzweise die benötigten Definitionen an und versuchen Sie, sich den Sachverhalt an einem Beispiel (oder auch Gegenbeispiel) zu veranschaulichen. Bei den gefragten Beweisskizzen dürfen Hilfsresultate (z. B. vorhergehende Lemmas) aus der Vorlesung verwendet werden.

Aufgabe 1: Abadie-CQ und Guignard-CQ am Beispiel

Untersuchen Sie bei folgenden Optimierungsaufgaben die Regularitätsbedingungen von Abadie und Guignard im jeweils einzigen zulässigen Punkt:

(a)

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & (x+1)^2 \quad \text{über } x \in \mathbb{R} \\ \text{unter} \quad & x^2 \le 0, \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & (x+1)^2 \quad \text{über } x \in \mathbb{R} \\ \text{unter} \quad & x = 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 2: Hauptsatz der konvexen Optimierung

Formulieren Sie den Hauptsatz der konvexen Optimierung und skizzieren Sie dessen Beweis.

Aufgabe 3: Numerisches Verfahren

Wie heißt der folgende Algorithmus? Welche Probleme lassen sich damit lösen?

Algorithmus:

Wähle $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ und setze $k := 0$
while Abbruchkriterium nicht erfüllt **do**
    Setze $d^{(k)} := -\nabla f(x^{(k)})$
    Bestimme $t^{(k)}$, sodass

$$f(x^{(k)} + t^{(k)}\, d^{(k)}) = \min_{t \ge 0} f(x^{(k)} + t\, d^{(k)})$$

    gilt
    Setze $x^{(k+1)} := x^{(k)} + t^{(k)}\, d^{(k)}$ und $k := k + 1$
end while

Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. R. Herzog, J. Blechschmidt, A. Schäfer

Chemnitz, 5. März 2015

Grundlagen der Optimierung

Aufgabenblatt 17

Hinweis: Versuchen Sie, die nachfolgenden Aufgaben so gut wie möglich zu bearbeiten. Sollten Sie an einer Stelle nicht weiterkommen, so geben Sie ersatzweise die benötigten Definitionen an und versuchen Sie, sich den Sachverhalt an einem Beispiel (oder auch Gegenbeispiel) zu veranschaulichen. Bei den gefragten Beweisskizzen dürfen Hilfsresultate (z. B. vorhergehende Lemmas) aus der Vorlesung verwendet werden.

Aufgabe 1: $\mathcal{T}_X(x_0)$ und $\mathcal{T}_X^{\text{lin}}(x_0)$ an einem Beispiel

In den folgenden zwei Teilaufgaben wird jeweils eine zulässige Menge X durch $X = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \le 0\}$ beschrieben. Gib jeweils für den gegebenen Punkt x_0 die Menge der aktiven Indizes $\mathcal{A}(x_0)$, den Tangentialkegel $\mathcal{T}_X(x_0)$ und den linearisierten Tangentialkegel $\mathcal{T}_X^{\text{lin}}(x_0)$ an. Fertige je eine Skizze an.

(a)
$$g(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 1 \\ 1 - x_1 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad x_0 = (1,\, 0)^\top$$

(b)
$$g(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 1 \\ 1 - x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad x_0 = (1,\, 0)^\top$$

Aufgabe 2: Trennungssatz

(a) Vervollständigen Sie die Voraussetzungen des folgenden Satzes und skizzieren Sie dessen Beweis.

(b) Veranschaulichen Sie die Aussage des Satzes grafisch.

Satz. *Es seien $C_1, C_2 \subset \mathbb{R}^n$ __________________________________. Dann existieren $a \in \mathbb{R}^n$, $a \neq 0$, und $\beta \in \mathbb{R}$ mit*

$$a^\top x_1 \le \beta \le a^\top x_2 \quad \textit{für alle } x_1 \in C_1,\ x_2 \in C_2.$$

Aufgabe 3: Numerisches Verfahren

Wie heißt der folgende Algorithmus? Welche Probleme lassen sich damit lösen?

Algorithmus:

1: Wähle $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch positiv definit und setze $k := 0$

2: **while** Abbruchkriterium nicht erfüllt **do**

Setze $d^{(k)} := -M^{-1}\nabla f(x^{(k)})$

Bestimme $t^{(k)}$, sodass

$$f(x^{(k)} + t^{(k)}\, d^{(k)}) = \min_{t \geq 0} f(x^{(k)} + t\, d^{(k)})$$

gilt

Setze $x^{(k+1)} := x^{(k)} + t^{(k)}\, d^{(k)}$ und $k := k + 1$

end while

Technische Universität Chemnitz Chemnitz, 5. März 2015
Prof. Dr. R. Herzog, J. Blechschmidt, A. Schäfer

Grundlagen der Optimierung

Aufgabenblatt 18

Hinweis: Versuchen Sie, die nachfolgenden Aufgaben so gut wie möglich zu bearbeiten. Sollten Sie an einer Stelle nicht weiterkommen, so geben Sie ersatzweise die benötigten Definitionen an und versuchen Sie, sich den Sachverhalt an einem Beispiel (oder auch Gegenbeispiel) zu veranschaulichen. Bei den gefragten Beweisskizzen dürfen Hilfsresultate (z. B. vorhergehende Lemmas) aus der Vorlesung verwendet werden.

Aufgabe 1: Simplex-Verfahren zum Lösen eines LPs

Betrachten Sie das folgende lineare Optimierungsproblem

$$\begin{array}{rrcl} \min & 3\,x_1 + x_2 & & \\ \text{sodass} & x_1 - x_2 & \leq & 3 \\ & x_1 - 3x_2 & \leq & 1 \\ & x_1,\ x_2 & \geq & 0. \end{array}$$

(a) Formen Sie das Optimierungsproblem in ein LP in Normalform um.

(b) Lösen Sie das Programm „von Hand“ mit dem Simplex-Algorithmus. Starten Sie mit dem zu $(x_1, x_2) = (4, 1)$ gehörenden Basisvektor.
Hinweis: Sollten Sie damit Probleme haben, versuchen Sie das Problem grafisch zu lösen und geben Sie zwei zulässige Basisvektoren an.

Aufgabe 2: Trennungssatz

(a) Vervollständigen Sie die Voraussetzungen des folgenden Satzes und skizzieren Sie dessen Beweis.

(b) Veranschaulichen Sie die Aussage des Satzes grafisch.

Satz. *Es seien $C_1, C_2 \subset \mathbb{R}^n$ ____. Dann existieren $a \in \mathbb{R}^n$, $a \neq 0$, und $\beta \in \mathbb{R}$ mit*

$$a^\top x_1 \leq \beta \leq a^\top x_2 \quad \textit{für alle } x_1 \in C_1,\ x_2 \in C_2.$$

Aufgabe 3: Numerisches Verfahren

Wie heißt der folgende Algorithmus? Welche Probleme lassen sich damit lösen?

Algorithmus:

1: Wähle $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, $\sigma \in (0, 1)$, $\beta \in (0, 1)$, $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch positiv definit und setze $k := 0$

while Abbruchkriterium nicht erfüllt **do**

Setze $d^{(k)} := -M^{-1}\nabla f(x^{(k)})$

Bestimme $t^{(k)} > 0$, sodass

$$f(x^{(k)} + t^{(k)}\, d^{(k)}) \leq f(x^{(k)}) + \sigma\, t^{(k)}\, \nabla f(x^{(k)})^\top d^{(k)}$$

gilt

Setze $x^{(k+1)} := x^{(k)} + t^{(k)}\, d^{(k)}$ und $k := k+1$

end while

Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. R. Herzog, J. Blechschmidt, A. Schäfer

Chemnitz, 5. März 2015

Grundlagen der Optimierung

Aufgabenblatt 19

Hinweis: Versuchen Sie, die nachfolgenden Aufgaben so gut wie möglich zu bearbeiten. Sollten Sie an einer Stelle nicht weiterkommen, so geben Sie ersatzweise die benötigten Definitionen an und versuchen Sie, sich den Sachverhalt an einem Beispiel (oder auch Gegenbeispiel) zu veranschaulichen. Bei den gefragten Beweisskizzen dürfen Hilfsresultate (z. B. vorhergehende Lemmas) aus der Vorlesung verwendet werden.

Aufgabe 1: Duales LP an Beispielen

Geben Sie zu folgenden linearen Programmen die zugehörigen dualen Probleme an.

(a)

$$\begin{array}{ll} \max & c^\top x \\ \text{sodass} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{ll} \min & c^\top x \\ \text{sodass} & Ax \geq b \\ & x \text{ frei} \end{array}$$

Aufgabe 2: Existenz des Subdifferentials

Definieren Sie den Begriff des Subdifferentials einer konvexen Funktion und skizzieren Sie den Beweis des folgenden Satzes.

Satz. *Es seien $f : C \to \mathbb{R}$ konvex und $x_0 \in \operatorname{int}(C)$. Dann ist $\partial f(x_0) \neq \emptyset$.*

Aufgabe 3: Numerisches Verfahren

Wie heißt der folgende Algorithmus? Welche Probleme lassen sich damit lösen?

Algorithmus:

Wähle $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ und setze $k := 0$
while Abbruchkriterium nicht erfüllt **do**
  Löse das lineare Gleichungssystem $F'(x^{(k)})\, d^{(k)} := -F(x^{(k)})$
  Setze $x^{(k+1)} := x^{(k)} + d^{(k)}$ und $k := k + 1$
end while

Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. R. Herzog, J. Blechschmidt, A. Schäfer

Chemnitz, 5. März 2015

Grundlagen der Optimierung

Aufgabenblatt 20

Hinweis: Versuchen Sie, die nachfolgenden Aufgaben so gut wie möglich zu bearbeiten. Sollten Sie an einer Stelle nicht weiterkommen, so geben Sie ersatzweise die benötigten Definitionen an und versuchen Sie, sich den Sachverhalt an einem Beispiel (oder auch Gegenbeispiel) zu veranschaulichen. Bei den gefragten Beweisskizzen dürfen Hilfsresultate (z. B. vorhergehende Lemmas) aus der Vorlesung verwendet werden.

Aufgabe 1: Abadie-CQ und Guignard-CQ am Beispiel

Untersuchen Sie bei folgenden Optimierungsaufgaben die Regularitätsbedingungen von Abadie und Guignard im jeweils einzigen zulässigen Punkt:

(a)

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & (x+1)^2 \quad \text{über } x \in \mathbb{R} \\ \text{unter} \quad & x^2 \le 0, \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & (x+1)^2 \quad \text{über } x \in \mathbb{R} \\ \text{unter} \quad & x = 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 2: Existenz des Subdifferentials

Definieren Sie den Begriff des Subdifferentials einer konvexen Funktion und skizzieren Sie den Beweis des folgenden Satzes.

Satz. *Es seien $f : C \to \mathbb{R}$ konvex und $x_0 \in \operatorname{int}(C)$. Dann ist $\partial f(x_0) \neq \emptyset$.*

Aufgabe 3: Numerisches Verfahren

Wie heißt der folgende Algorithmus? Welche Probleme lassen sich damit lösen?

Algorithmus:

1: Wähle $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ und setze $k := 0$
2: **while** Abbruchkriterium nicht erfüllt **do**
3: Löse das lineare Gleichungssystem $\nabla^2 f(x^{(k)})\, d^{(k)} := -\nabla f(x^{(k)})$
4: Setze $x^{(k+1)} := x^{(k)} + d^{(k)}$ und $k := k+1$
5: **end while**

Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. R. Herzog, J. Blechschmidt, A. Schäfer

Chemnitz, 5. März 2015

Grundlagen der Optimierung

Aufgabenblatt 21

Hinweis: Versuchen Sie, die nachfolgenden Aufgaben so gut wie möglich zu bearbeiten. Sollten Sie an einer Stelle nicht weiterkommen, so geben Sie ersatzweise die benötigten Definitionen an und versuchen Sie, sich den Sachverhalt an einem Beispiel (oder auch Gegenbeispiel) zu veranschaulichen. Bei den gefragten Beweisskizzen dürfen Hilfsresultate (z. B. vorhergehende Lemmas) aus der Vorlesung verwendet werden.

Aufgabe 1: KKT-Bedingungen für quadratische Optimierungsprobleme

Wir betrachten die folgende quadratische Optimierungsaufgabe mit linearen Gleichungsnebenbedingungen:

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & \frac{1}{2} x^\top Q x + c^\top x \quad \text{über } x \in \mathbb{R}^n \\ \text{sodass} \quad & B\,x = d. \end{aligned}$$

Dabei sei $Q^\top = Q \succ 0$, und die Matrix $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ habe vollen Zeilenrang.

(a) Stelle die KKT-Bedingungen auf und formuliere diese als lineares Gleichungssystem.

(b) Ist der Lagrange-Multiplikator eindeutig bestimmt?

Aufgabe 2: Notwendige und hinreichende Bedingungen in der konvexen Optimierung

(a) Formulieren Sie die Grundaufgabe in der konvexen Optimierung.

(b) Geben Sie dafür notwendige und hinreichende Optimalitätsbedingungen an und skizzieren Sie den Beweis.

Aufgabe 3: Numerisches Verfahren

Wie heißt der folgende Algorithmus? Welche Probleme lassen sich damit lösen?

Algorithmus:

Finde einen zulässigen Basisvektor x von P mit zugehöriger Basis B und setze $N := \{1, \dots, n\} \setminus B$ und $k := 0$
Berechne

$$\widetilde{c}_N := c_N - A_N^\top A_B^{-\top} c_B$$

if $\widetilde{c}_N \geq 0$ **then**
    x ist eine Lösung des Problems, **STOP**
else
    Wähle $r \in N$ mit $\widetilde{c}_r < 0$

7: Berechne $d_B := A_B^{-1}\, a_r$

8: **if** $d_B \leq 0$ **then**

9: Das Problem ist unbeschränkt, **STOP**

10: **else**

11: Bestimme $\hat{t} \geq 0$ und $s \in B$ gemäß

$$\hat{t} := \min_{\substack{i \in B \\ d_i > 0}} \frac{x_i}{d_i} = \frac{x_s}{d_s}$$

12: Setze

$$x_i^+ := \begin{cases} x_i - \hat{t}\, d_i & \text{für } i \in B,\ i \neq s, \\ \hat{t} & \text{für } i = r, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

13: Setze $B^+ := \big(B \cup \{r\}\big) \setminus \{s\}$

14: Setze $N^+ := \{1, \dots, n\} \setminus B^+$

15: Setze $k := k + 1$, $x := x^+$, $B := B^+$, $N := N^+$

16: **end if**

17: **end if**

18: Gehe zu 2:

Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. R. Herzog, J. Blechschmidt, A. Schäfer

Chemnitz, 5. März 2015

Grundlagen der Optimierung

Aufgabenblatt 22

Hinweis: Versuchen Sie, die nachfolgenden Aufgaben so gut wie möglich zu bearbeiten. Sollten Sie an einer Stelle nicht weiterkommen, so geben Sie ersatzweise die benötigten Definitionen an und versuchen Sie, sich den Sachverhalt an einem Beispiel (oder auch Gegenbeispiel) zu veranschaulichen. Bei den gefragten Beweisskizzen dürfen Hilfsresultate (z. B. vorhergehende Lemmas) aus der Vorlesung verwendet werden.

Aufgabe 1: Newton-Verfahren zur Nullstellensuche am Beispiel

Wir suchen Nullstellen des folgenden Polynoms

$$f(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 + 21x - 18.$$

Bestimmen Sie ausgehend von Startpunkt $x^{(0)} = 0$ mit dem Newton-Verfahren die Näherung einer Nullstelle bis zur Genauigkeit $|f(x^{(k)})| < 0.01$.

Aufgabe 2: Notwendige und hinreichende Bedingungen in der konvexen Optimierung

(a) Formulieren Sie die Grundaufgabe in der konvexen Optimierung.

(b) Geben Sie dafür notwendige und hinreichende Optimalitätsbedingungen an und skizzieren Sie den Beweis.

Aufgabe 3: Numerisches Verfahren

Wie heißt der folgende Algorithmus? Welche Probleme lassen sich damit lösen?

Algorithmus:

Wähle $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, $\sigma \in (0,1)$, $\beta \in (0,1)$ und setze $k := 0$
while Abbruchkriterium nicht erfüllt **do**
  Setze $d^{(k)} := -\nabla f(x^{(k)})$
  Bestimme $t^{(k)} > 0$, sodass

$$f(x^{(k)} + t^{(k)}\, d^{(k)}) \le f(x^{(k)}) + \sigma\, t^{(k)}\, \nabla f(x^{(k)})^\top d^{(k)}$$

  gilt
  Setze $x^{(k+1)} := x^{(k)} + t^{(k)}\, d^{(k)}$ und $k := k+1$
end while

Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. R. Herzog, J. Blechschmidt, A. Schäfer

Chemnitz, 5. März 2015

Grundlagen der Optimierung

Aufgabenblatt 23

Hinweis: Versuchen Sie, die nachfolgenden Aufgaben so gut wie möglich zu bearbeiten. Sollten Sie an einer Stelle nicht weiterkommen, so geben Sie ersatzweise die benötigten Definitionen an und versuchen Sie, sich den Sachverhalt an einem Beispiel (oder auch Gegenbeispiel) zu veranschaulichen. Bei den gefragten Beweisskizzen dürfen Hilfsresultate (z. B. vorhergehende Lemmas) aus der Vorlesung verwendet werden.

Aufgabe 1: Grafisches Lösen eines LPs

Betrachten Sie das folgende lineare Optimierungsproblem

$$\begin{array}{rrcl} \min & 3\,x_1 - 4\,x_2 & & \\ \text{sodass} & x_1 & \leq & 2 \\ & x_2 & \leq & 3 \\ & x_1,\; x_2 & \geq & 0. \end{array}$$

(a) Lösen Sie das Problem grafisch.

(b) Formen Sie das Optimierungsproblem in ein LP in Normalform um.

(c) Geben Sie alle Basisvektoren an und identifizieren Sie sie in der Skizze aus (a).

(d) Welche der Basisvektoren sind zulässig?

(e) Bestimmen Sie die Ecken des Polyeders in Normalform aus der Nebenbedingung des LPs in (b).

Aufgabe 2: Epigraph konvexer Funktionen

Skizzieren Sie den Beweis des folgenden Satzes.

Satz. *Es sei $C \subset \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge und $f : C \to \mathbb{R}$. Dann gilt: Die Funktion f ist genau dann konvex, wenn ihr* ***Epigraph***

$$\operatorname{epi}(f) := \{(x, \alpha) \in C \times \mathbb{R} : \alpha \geq f(x)\}$$

eine konvexe Menge ist.

Aufgabe 3: Numerisches Verfahren

Wie heißt der folgende Algorithmus? Welche Probleme lassen sich damit lösen?

Algorithmus:

Wähle $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ und setze $k := 0$
while Abbruchkriterium nicht erfüllt **do**

Setze $d^{(k)} := -\nabla f(x^{(k)})$

Bestimme $t^{(k)}$, sodass

$$f(x^{(k)} + t^{(k)}\, d^{(k)}) = \min_{t \geq 0} f(x^{(k)} + t\, d^{(k)})$$

gilt

Setze $x^{(k+1)} := x^{(k)} + t^{(k)}\, d^{(k)}$ und $k := k + 1$

end while

Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. R. Herzog, J. Blechschmidt, A. Schäfer

Chemnitz, 5. März 2015

Grundlagen der Optimierung

Aufgabenblatt 24

Hinweis: Versuchen Sie, die nachfolgenden Aufgaben so gut wie möglich zu bearbeiten. Sollten Sie an einer Stelle nicht weiterkommen, so geben Sie ersatzweise die benötigten Definitionen an und versuchen Sie, sich den Sachverhalt an einem Beispiel (oder auch Gegenbeispiel) zu veranschaulichen. Bei den gefragten Beweisskizzen dürfen Hilfsresultate (z. B. vorhergehende Lemmas) aus der Vorlesung verwendet werden.

Aufgabe 1: Lineare Regression

Gegeben seien die Messwerte $(x_i, y_i), i = 1, \ldots, m$. Ein zugrunde liegendes physikalisches Modell sagt den linearen Zusammenhang

$$y(x) = ax + b$$

voraus. Anhand der Messwerte sollen die Parameter a und b bestimmt werden, sodass die Summe der Fehlerquadrate minimiert wird, d.h. es ist das unbeschränkte Optimierungsproblem

$$\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \quad f(a,b) = \sum_{i=1}^{m} (y(x_i) - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{m} (ax_i + b - y_i)^2$$

zu lösen. Wie lauten die notwendigen Optimalitätsbedingungen erster Ordnung?

Aufgabe 2: Epigraph konvexer Funktionen

Skizzieren Sie den Beweis des folgenden Satzes.

Satz. *Es sei $C \subset \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge und $f : C \to \mathbb{R}$. Dann gilt: Die Funktion f ist genau dann konvex, wenn ihr* ***Epigraph***

$$\operatorname{epi}(f) := \{(x, \alpha) \in C \times \mathbb{R} : \alpha \geq f(x)\}$$

eine konvexe Menge ist.

Aufgabe 3: Numerisches Verfahren

Wie heißt der folgende Algorithmus? Welche Probleme lassen sich damit lösen?

Algorithmus:

Wähle $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch positiv definit und setze $k := 0$
while Abbruchkriterium nicht erfüllt **do**
    Setze $d^{(k)} := -M^{-1}\nabla f(x^{(k)})$

Bestimme $t^{(k)}$, sodass

$$f(x^{(k)} + t^{(k)}\, d^{(k)}) = \min_{t \geq 0} f(x^{(k)} + t\, d^{(k)})$$

gilt

Setze $x^{(k+1)} := x^{(k)} + t^{(k)}\, d^{(k)}$ und $k := k + 1$

end while

Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. R. Herzog, J. Blechschmidt, A. Schäfer

Chemnitz, 5. März 2015

Grundlagen der Optimierung

Aufgabenblatt 25

Hinweis: Versuchen Sie, die nachfolgenden Aufgaben so gut wie möglich zu bearbeiten. Sollten Sie an einer Stelle nicht weiterkommen, so geben Sie ersatzweise die benötigten Definitionen an und versuchen Sie, sich den Sachverhalt an einem Beispiel (oder auch Gegenbeispiel) zu veranschaulichen. Bei den gefragten Beweisskizzen dürfen Hilfsresultate (z. B. vorhergehende Lemmas) aus der Vorlesung verwendet werden.

Aufgabe 1: KKT-Bedingungen bei Box-Beschränkungen

Wir betrachten das folgende Optimierungsproblem mit Box-Beschränkungen

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & f(x) \qquad \text{über } x \in \mathbb{R}^n \\ \text{sodass} \quad & a \le g(x) \le b \\ \text{und} \quad & h(x) = 0. \end{aligned}$$

Hierbei sind $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ stetig differenzierbar und $a, b \in \mathbb{R}^m$ mit $a \le b$. Geben Sie die zugehörigen KKT-Bedingungen an.

Aufgabe 2: Charakterisierung konvexer Funktionen

Skizzieren Sie den Beweis des folgenden Satzes und veranschaulichen Sie die Aussage grafisch (im Fall $n = 1$).

Satz. *Es sei $C \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex sowie $f : C \to \mathbb{R}$ stetig partiell diffbar. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) f ist konvex auf C.

(b) Für alle $x, y \in C$ gilt:

$$f(x) - f(y) \ge \nabla f(y)^\top (x - y).$$

(c) Für alle $x, y \in C$ gilt:

$$\big(\nabla f(x) - \nabla f(y)\big)^\top (x - y) \ge 0.$$

Aufgabe 3: Numerisches Verfahren

Wie heißt der folgende Algorithmus? Welche Probleme lassen sich damit lösen?

Algorithmus:

1: Wähle $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, $\sigma \in (0,1)$, $\beta \in (0,1)$, $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch positiv definit und setze $k := 0$
2: **while** Abbruchkriterium nicht erfüllt **do**

Setze $d^{(k)} := -M^{-1}\nabla f(x^{(k)})$

Bestimme $t^{(k)} > 0$, sodass

$$f(x^{(k)} + t^{(k)}\, d^{(k)}) \le f(x^{(k)}) + \sigma\, t^{(k)}\, \nabla f(x^{(k)})^\top d^{(k)}$$

gilt

Setze $x^{(k+1)} := x^{(k)} + t^{(k)}\, d^{(k)}$ und $k := k + 1$

end while

Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. R. Herzog, J. Blechschmidt, A. Schäfer

Chemnitz, 5. März 2015

Grundlagen der Optimierung

Aufgabenblatt 26

Hinweis: Versuchen Sie, die nachfolgenden Aufgaben so gut wie möglich zu bearbeiten. Sollten Sie an einer Stelle nicht weiterkommen, so geben Sie ersatzweise die benötigten Definitionen an und versuchen Sie, sich den Sachverhalt an einem Beispiel (oder auch Gegenbeispiel) zu veranschaulichen. Bei den gefragten Beweisskizzen dürfen Hilfsresultate (z. B. vorhergehende Lemmas) aus der Vorlesung verwendet werden.

Aufgabe 1: Beispiele für CQs

Zeige, dass für das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{sodass} \quad & x_1 \cdot x_2 = 0 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

im Nullpunkt $x^* = (0,0)$ die Guignard-CQ, aber nicht die Abadie-CQ erfüllt ist.

Aufgabe 2: Charakterisierung konvexer Funktionen

Skizzieren Sie den Beweis des folgenden Satzes und veranschaulichen Sie die Aussage grafisch (im Fall $n = 1$).

Satz. *Es sei $C \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex sowie $f : C \to \mathbb{R}$ stetig partiell diffbar. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) f ist konvex auf C.

(b) Für alle $x, y \in C$ gilt:
$$f(x) - f(y) \geq \nabla f(y)^\top (x - y).$$

(c) Für alle $x, y \in C$ gilt:
$$\big(\nabla f(x) - \nabla f(y)\big)^\top (x - y) \geq 0.$$

Aufgabe 3: Numerisches Verfahren

Wie heißt der folgende Algorithmus? Welche Probleme lassen sich damit lösen?

Algorithmus:

Wähle $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ und setze $k := 0$
while Abbruchkriterium nicht erfüllt **do**
    Löse das lineare Gleichungssystem $F'(x^{(k)})\, d^{(k)} := -F(x^{(k)})$
    Setze $x^{(k+1)} := x^{(k)} + d^{(k)}$ und $k := k + 1$
end while

Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. R. Herzog, J. Blechschmidt, A. Schäfer

Chemnitz, 5. März 2015

Grundlagen der Optimierung

Aufgabenblatt 27

Hinweis: Versuchen Sie, die nachfolgenden Aufgaben so gut wie möglich zu bearbeiten. Sollten Sie an einer Stelle nicht weiterkommen, so geben Sie ersatzweise die benötigten Definitionen an und versuchen Sie, sich den Sachverhalt an einem Beispiel (oder auch Gegenbeispiel) zu veranschaulichen. Bei den gefragten Beweisskizzen dürfen Hilfsresultate (z. B. vorhergehende Lemmas) aus der Vorlesung verwendet werden.

Aufgabe 1: Duales LP vom dualen LP

(a) Geben Sie ein lineares Programm (LP) in Normalform an.

(b) Zeigen Sie, dass sich das duale vom dualen eines LP in Normalform wieder als das primale Problem auffassen lässt.

Aufgabe 2: KKT-Bedingungen in der nichtlinearen Optimierung

(a) Formulieren Sie ein allgemeines nichtlineares Optimierungsproblem.

(b) Geben Sie die zugehörigen KKT-Bedingungen an.

(c) Skizzieren Sie den Beweis des folgenden Lemmas.

Lemma. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(a) (x, λ, μ) *ist ein KKT-Punkt der allgemeinen nichtlinearen Optimierungsaufgabe.*

(b) x *ist zulässig, und es gilt* $-\nabla f(x) \in \mathcal{T}_X^{\text{lin}}(x)^\circ$.

Aufgabe 3: Numerisches Verfahren

Wie heißt der folgende Algorithmus? Welche Probleme lassen sich damit lösen?

Algorithmus:

1: Wähle $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ und setze $k := 0$
2: **while** Abbruchkriterium nicht erfüllt **do**
3: Löse das lineare Gleichungssystem $\nabla^2 f(x^{(k)})\, d^{(k)} := -\nabla f(x^{(k)})$
4: Setze $x^{(k+1)} := x^{(k)} + d^{(k)}$ und $k := k+1$
5: **end while**

Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. R. Herzog, J. Blechschmidt, A. Schäfer

Chemnitz, 5. März 2015

Grundlagen der Optimierung

Aufgabenblatt 28

Hinweis: Versuchen Sie, die nachfolgenden Aufgaben so gut wie möglich zu bearbeiten. Sollten Sie an einer Stelle nicht weiterkommen, so geben Sie ersatzweise die benötigten Definitionen an und versuchen Sie, sich den Sachverhalt an einem Beispiel (oder auch Gegenbeispiel) zu veranschaulichen. Bei den gefragten Beweisskizzen dürfen Hilfsresultate (z. B. vorhergehende Lemmas) aus der Vorlesung verwendet werden.

Aufgabe 1: Einige konvexe Kegel

Bestätigen Sie, dass folgende Mengen konvexe Kegel sind.

(a) abgeschlossener Orthant $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0\}$

(b) Lorentzkegel $K = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \|x\|_2 \leq t\}$

Aufgabe 2: KKT-Bedingungen in der nichtlinearen Optimierung

(a) Formulieren Sie ein allgemeines nichtlineares Optimierungsproblem.

(b) Geben Sie die zugehörigen KKT-Bedingungen an.

(c) Skizzieren Sie den Beweis des folgenden Lemmas.

Lemma. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(a) (x, λ, μ) *ist ein KKT-Punkt der allgemeinen nichtlinearen Optimierungsaufgabe.*

(b) x *ist zulässig, und es gilt* $-\nabla f(x) \in \mathcal{T}_X^{\text{lin}}(x)^\circ$.

Aufgabe 3: Numerisches Verfahren

Wie heißt der folgende Algorithmus? Welche Probleme lassen sich damit lösen?

Algorithmus:

1: Finde einen zulässigen Basisvektor x von P mit zugehöriger Basis B und setze $N := \{1, \ldots, n\} \setminus B$ und $k := 0$
2: Berechne
$$\widetilde{c}_N := c_N - A_N^\top A_B^{-\top} c_B$$
3: **if** $\widetilde{c}_N \geq 0$ **then**
4: x ist eine Lösung des Problems, **STOP**
5: **else**
6: Wähle $r \in N$ mit $\widetilde{c}_r < 0$
7: Berechne $d_B := A_B^{-1} a_r$

if $d_B \leq 0$ **then**

Das Problem ist unbeschränkt, **STOP**

else

Bestimme $\hat{t} \geq 0$ und $s \in B$ gemäß

$$\hat{t} := \min_{\substack{i \in B \\ d_i > 0}} \frac{x_i}{d_i} = \frac{x_s}{d_s}$$

Setze

$$x_i^+ := \begin{cases} x_i - \hat{t}\, d_i & \text{für } i \in B,\ i \neq s, \\ \hat{t} & \text{für } i = r, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Setze $B^+ := \big(B \cup \{r\}\big) \setminus \{s\}$

Setze $N^+ := \{1, \ldots, n\} \setminus B^+$

Setze $k := k + 1$, $x := x^+$, $B := B^+$, $N := N^+$

end if

end if

Gehe zu 2:

Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. R. Herzog, J. Blechschmidt, A. Schäfer Chemnitz, 5. März 2015

Grundlagen der Optimierung

Aufgabenblatt 29

Hinweis: Versuchen Sie, die nachfolgenden Aufgaben so gut wie möglich zu bearbeiten. Sollten Sie an einer Stelle nicht weiterkommen, so geben Sie ersatzweise die benötigten Definitionen an und versuchen Sie, sich den Sachverhalt an einem Beispiel (oder auch Gegenbeispiel) zu veranschaulichen. Bei den gefragten Beweisskizzen dürfen Hilfsresultate (z. B. vorhergehende Lemmas) aus der Vorlesung verwendet werden.

Aufgabe 1: Selbstduale LPs

Wir betrachten das lineare Problem

$$\begin{aligned} \min \quad & c^\top x \\ \text{sodass} \quad & Ax \le b \\ \text{und} \quad & x \ge 0 \end{aligned}$$

(a) Zeige, dass das Problem selbstdual ist, falls $A = -A^\top$ und $b = c$ gilt.

(b) Zeige, dass der Optimalwert eines solchen LPs Null ist, falls das Problem überhaupt einen zulässigen Punkt besitzt.

Aufgabe 2: KKT-Bedingungen bei linearen Nebenbedingungen

(a) Geben Sie für die Aufgabe

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & f(x) \qquad \text{über } x \in \mathbb{R}^n \\ \text{sodass} \quad & A_1 x \le b_1 \\ \text{und} \quad & A_2 x = b_2 \end{aligned}$$

mit $A_1 \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $A_2 \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $b_1 \in \mathbb{R}^m$, $b_2 \in \mathbb{R}^p$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar die KKT-Bedingungen an.

(b) Existieren in einem lokalen Optimum x^* der obigen Aufgabe immer Lagrange-Multiplikatoren? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3: Numerisches Verfahren

Wie heißt der folgende Algorithmus? Welche Probleme lassen sich damit lösen?

Algorithmus:

1: Wähle $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, $\sigma \in (0,1)$, $\beta \in (0,1)$ und setze $k := 0$
2: **while** Abbruchkriterium nicht erfüllt **do**
3: Setze $d^{(k)} := -\nabla f(x^{(k)})$

Bestimme $t^{(k)} > 0$, sodass

$$f(x^{(k)} + t^{(k)}\, d^{(k)}) \leq f(x^{(k)}) + \sigma\, t^{(k)}\, \nabla f(x^{(k)})^\top d^{(k)}$$

gilt

Setze $x^{(k+1)} := x^{(k)} + t^{(k)}\, d^{(k)}$ und $k := k + 1$

end while

Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. R. Herzog, J. Blechschmidt, A. Schäfer

Chemnitz, 5. März 2015

Grundlagen der Optimierung
Aufgabenblatt 30

Hinweis: Versuchen Sie, die nachfolgenden Aufgaben so gut wie möglich zu bearbeiten. Sollten Sie an einer Stelle nicht weiterkommen, so geben Sie ersatzweise die benötigten Definitionen an und versuchen Sie, sich den Sachverhalt an einem Beispiel (oder auch Gegenbeispiel) zu veranschaulichen. Bei den gefragten Beweisskizzen dürfen Hilfsresultate (z. B. vorhergehende Lemmas) aus der Vorlesung verwendet werden.

Aufgabe 1: Beispiele konvexer Mengen und Kegel

Seien

$$\begin{aligned} A_1 &= \{f \in C([0,1], \mathbb{R}) : \; f(0) = f(1)\}, \\ A_2 &= \{f \in C([0,1], \mathbb{R}) : \; f(0) = 2\}. \end{aligned}$$

Prüfen Sie, ob die Mengen A_i konvex, Kegel oder sogar konvexe Kegel sind.
Hinweis: $C([0,1], \mathbb{R})$ bezeichnet die Menge der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[0,1]$ mit Werten in $\mathbb{R}$.

Aufgabe 2: KKT-Bedingungen bei linearen Nebenbedingungen

(a) Geben Sie für die Aufgabe

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & f(x) \qquad \text{über } x \in \mathbb{R}^n \\ \text{sodass} \quad & A_1 x \le b_1 \\ \text{und} \quad & A_2 x = b_2 \end{aligned}$$

mit $A_1 \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $A_2 \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $b_1 \in \mathbb{R}^m$, $b_2 \in \mathbb{R}^p$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar die KKT-Bedingungen an.

(b) Existieren in einem lokalen Optimum x^* der obigen Aufgabe immer Lagrange-Multiplikatoren? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3: Numerisches Verfahren

Wie heißt der folgende Algorithmus? Welche Probleme lassen sich damit lösen?

Algorithmus:

1: Wähle $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ und setze $k := 0$
2: **while** Abbruchkriterium nicht erfüllt **do**
3: Setze $d^{(k)} := -\nabla f(x^{(k)})$
4: Bestimme $t^{(k)}$, sodass

$$f(x^{(k)} + t^{(k)}\, d^{(k)}) = \min_{t \ge 0} f(x^{(k)} + t\, d^{(k)})$$

gilt
5: Setze $x^{(k+1)} := x^{(k)} + t^{(k)}\, d^{(k)}$ und $k := k + 1$
6: **end while**

Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. R. Herzog, J. Blechschmidt, A. Schäfer

Chemnitz, 5. März 2015

Grundlagen der Optimierung

Aufgabenblatt 31

Hinweis: Versuchen Sie, die nachfolgenden Aufgaben so gut wie möglich zu bearbeiten. Sollten Sie an einer Stelle nicht weiterkommen, so geben Sie ersatzweise die benötigten Definitionen an und versuchen Sie, sich den Sachverhalt an einem Beispiel (oder auch Gegenbeispiel) zu veranschaulichen. Bei den gefragten Beweisskizzen dürfen Hilfsresultate (z. B. vorhergehende Lemmas) aus der Vorlesung verwendet werden.

Aufgabe 1: Gradientenverfahren mit exakter Liniensuche am Beispiel

Wir betrachten das Problem

$$\text{Minimiere} \quad x^2 + (y-3)^2.$$

Bestimmen Sie die ersten zwei Iterierten des Gradientenverfahrens mit Startpunkt $(x_0, y_0) = (0, 0)$ und exakter Liniensuche.

Aufgabe 2: KKT-Bedingungen unter LICQ

(a) Formulieren Sie ein allgemeines nichtlineares Optimierungsproblem.

(b) Geben Sie die zugehörigen KKT-Bedingungen an.

(c) Skizzieren Sie den Beweis des folgenden Satzes.

Satz. *Es sei x^* ein lokales Optimum der obigen Optimierungsaufgabe, das die LICQ erfüllt. Dann existieren eindeutig bestimmte Lagrange-Multiplikatoren λ^* und μ^*, sodass (x^*, λ^*, μ^*) ein KKT-Punkt ist.*

Aufgabe 3: Numerisches Verfahren

Wie heißt der folgende Algorithmus? Welche Probleme lassen sich damit lösen?

Algorithmus:

```
Finde einen zulässigen Basisvektor x von P mit zugehöriger Basis B und setze N := {1, ..., n} \ B und k := 0
Berechne
        c̃_N := c_N − A_N^⊤ A_B^{−⊤} c_B
if c̃_N ≥ 0 then
    x ist eine Lösung des Problems, STOP
else
    Wähle r ∈ N mit c̃_r < 0
```

7: Berechne $d_B := A_B^{-1}\, a_r$
8: **if** $d_B \leq 0$ **then**
9: Das Problem ist unbeschränkt, **STOP**
10: **else**
11: Bestimme $\hat{t} \geq 0$ und $s \in B$ gemäß

$$\hat{t} := \min_{\substack{i \in B \\ d_i > 0}} \frac{x_i}{d_i} = \frac{x_s}{d_s}$$

12: Setze

$$x_i^+ := \begin{cases} x_i - \hat{t}\, d_i & \text{für } i \in B,\ i \neq s, \\ \hat{t} & \text{für } i = r, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

13: Setze $B^+ := \big(B \cup \{r\}\big) \setminus \{s\}$
14: Setze $N^+ := \{1, \ldots, n\} \setminus B^+$
15: Setze $k := k + 1$, $x := x^+$, $B := B^+$, $N := N^+$
16: **end if**
17: **end if**
18: Gehe zu 2:

Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. R. Herzog, J. Blechschmidt, A. Schäfer

Chemnitz, 5. März 2015

Grundlagen der Optimierung

Aufgabenblatt 32

Hinweis: Versuchen Sie, die nachfolgenden Aufgaben so gut wie möglich zu bearbeiten. Sollten Sie an einer Stelle nicht weiterkommen, so geben Sie ersatzweise die benötigten Definitionen an und versuchen Sie, sich den Sachverhalt an einem Beispiel (oder auch Gegenbeispiel) zu veranschaulichen. Bei den gefragten Beweisskizzen dürfen Hilfsresultate (z. B. vorhergehende Lemmas) aus der Vorlesung verwendet werden.

Aufgabe 1: Duales LP an Beispielen

Geben Sie zu folgenden linearen Programmen die zugehörigen dualen Probleme an.

(a)

$$\begin{array}{ll} \text{max} & c^\top x \\ \text{sodass} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{ll} \text{min} & c^\top x \\ \text{sodass} & Ax \geq b \\ & x \text{ frei} \end{array}$$

Aufgabe 2: KKT-Bedingungen unter LICQ

(a) Formulieren Sie ein allgemeines nichtlineares Optimierungsproblem.

(b) Geben Sie die zugehörigen KKT-Bedingungen an.

(c) Skizzieren Sie den Beweis des folgenden Satzes.

Satz. *Es sei x^* ein lokales Optimum der obigen Optimierungsaufgabe, das die LICQ erfüllt. Dann existieren eindeutig bestimmte Lagrange-Multiplikatoren λ^* und μ^*, sodass (x^*, λ^*, μ^*) ein KKT-Punkt ist.*

Aufgabe 3: Numerisches Verfahren

Wie heißt der folgende Algorithmus? Welche Probleme lassen sich damit lösen?

Algorithmus:

Wähle $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, $\sigma \in (0,1)$, $\beta \in (0,1)$, $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch positiv definit und setze $k := 0$

while Abbruchkriterium nicht erfüllt **do**

    Setze $d^{(k)} := -M^{-1}\nabla f(x^{(k)})$

Bestimme $t^{(k)} > 0$, sodass

$$f(x^{(k)} + t^{(k)}\, d^{(k)}) \leq f(x^{(k)}) + \sigma\, t^{(k)}\, \nabla f(x^{(k)})^\top d^{(k)}$$

gilt

Setze $x^{(k+1)} := x^{(k)} + t^{(k)}\, d^{(k)}$ und $k := k + 1$

end while

Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. R. Herzog, J. Blechschmidt, A. Schäfer

Chemnitz, 5. März 2015

Grundlagen der Optimierung
Aufgabenblatt 33

Hinweis: Versuchen Sie, die nachfolgenden Aufgaben so gut wie möglich zu bearbeiten. Sollten Sie an einer Stelle nicht weiterkommen, so geben Sie ersatzweise die benötigten Definitionen an und versuchen Sie, sich den Sachverhalt an einem Beispiel (oder auch Gegenbeispiel) zu veranschaulichen. Bei den gefragten Beweisskizzen dürfen Hilfsresultate (z. B. vorhergehende Lemmas) aus der Vorlesung verwendet werden.

Aufgabe 1: Beispiele konvexer Mengen und Kegel

Seien

$$A_1 = \{f \in C([0,1],\mathbb{R}) : \; f(0) = f(1)\},$$
$$A_2 = \{f \in C([0,1],\mathbb{R}) : \; f(0) \neq 0\}$$

Prüfen Sie, ob die Mengen A_i konvex, Kegel oder sogar konvexe Kegel sind.
Hinweis: $C([0,1],\mathbb{R})$ bezeichnet die Menge der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[0,1]$ mit Werten in $\mathbb{R}$.

Aufgabe 2: Hinreichende Optimalitätsbedingungen der konvexen Optimierung

Betrachten Sie das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & f(x) \quad \text{über } x \in \mathbb{R}^n \\ \text{sodass} \quad & g_i(x) \leq 0, \quad i = 1,\dots,m \\ \text{und} \quad & Ax = b. \end{aligned}$$

Dabei sind $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig partiell diffbar und konvex, $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ für $i = 1,\dots,m$ stetig partiell diffbar und konvex, $A \in \mathbb{R}^{p\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^p$.

(a) Formulieren Sie die KKT-Bedingungen zur obigen Aufgabe.
(b) Skizzieren Sie den Beweis des folgenden Satzes.

Satz. *Es sei (x^*, λ^*, μ^*) ein KKT-Punkt einer allgemeinen konvexen Optimierungsaufgabe. Dann ist x^* ein Optimum von dieser Aufgabe.*

Aufgabe 3: Numerisches Verfahren

Wie heißt der folgende Algorithmus? Welche Probleme lassen sich damit lösen?

Algorithmus:

```
Wähle x^(0) ∈ R^n und setze k := 0
while Abbruchkriterium nicht erfüllt do
    Löse das lineare Gleichungssystem F'(x^(k)) d^(k) := −F(x^(k))
    Setze x^(k+1) := x^(k) + d^(k) und k := k + 1
end while
```

Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. R. Herzog, J. Blechschmidt, A. Schäfer

Chemnitz, 5. März 2015

Grundlagen der Optimierung

Aufgabenblatt 34

Hinweis: Versuchen Sie, die nachfolgenden Aufgaben so gut wie möglich zu bearbeiten. Sollten Sie an einer Stelle nicht weiterkommen, so geben Sie ersatzweise die benötigten Definitionen an und versuchen Sie, sich den Sachverhalt an einem Beispiel (oder auch Gegenbeispiel) zu veranschaulichen. Bei den gefragten Beweisskizzen dürfen Hilfsresultate (z. B. vorhergehende Lemmas) aus der Vorlesung verwendet werden.

Aufgabe 1: Duales LP vom dualen LP

(a) Geben Sie ein lineares Programm (LP) in Normalform an.

(b) Zeigen Sie, dass sich das duale vom dualen eines LP in Normalform wieder als das primale Problem auffassen lässt.

Aufgabe 2: Hinreichende Optimalitätsbedingungen der konvexen Optimierung

Betrachten Sie das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & f(x) \quad \text{über } x \in \mathbb{R}^n \\ \text{sodass} \quad & g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m \\ \text{und} \quad & Ax = b. \end{aligned}$$

Dabei sind $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig partiell diffbar und konvex, $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ für $i = 1, \ldots, m$ stetig partiell diffbar und konvex, $A \in \mathbb{R}^{p \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^p$.

(a) Formulieren Sie die KKT-Bedingungen zur obigen Aufgabe.

(b) Skizzieren Sie den Beweis des folgenden Satzes.

Satz. *Es sei (x^*, λ^*, μ^*) ein KKT-Punkt einer allgemeinen konvexen Optimierungsaufgabe. Dann ist x^* ein Optimum von dieser Aufgabe.*

Aufgabe 3: Numerisches Verfahren

Wie heißt der folgende Algorithmus? Welche Probleme lassen sich damit lösen?

Algorithmus:

Wähle $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ und setze $k := 0$
while Abbruchkriterium nicht erfüllt **do**
    Löse das lineare Gleichungssystem $\nabla^2 f(x^{(k)})\, d^{(k)} := -\nabla f(x^{(k)})$
    Setze $x^{(k+1)} := x^{(k)} + d^{(k)}$ und $k := k + 1$
end while