

Grundlagen der Optimierung

Beispiel einer linearen Optimierungsaufgabe

Beispiel 6.1 (Mozartproblem)

Eine Firma stellt Mozartkugeln und Mozarttaler her und benötigt dafür folgende Zutaten:

	Marzipan	Nougat	Bitterschokolade	Verkaufspreis
Mozartkugeln	1	2	1	9
Mozarttaler	1	1	2	8
Lagerbestand	6	11	9	

Frage: Welche Menge an Mozartkugeln und -talern sollte produziert werden, um den Umsatz zu maximieren?

Es sei

x_1 = Menge an Mozartkugeln

x_2 = Menge an Mozarttalern.

Wir erhalten folgende lineare Optimierungsaufgabe:

$$\left. \begin{array}{ll} \max & 9x_1 + 8x_2 \\ \text{sodass} & x_1 + x_2 \leq 6 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 11 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 9 \\ \text{und} & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0. \end{array} \right\} \quad (6.1)$$

◇

Aus der Modellierung ergibt sich in [Beispiel 6.1](#) folgende typische Gestalt einer linearen Optimierungsaufgabe:

$$\left. \begin{array}{ll} \max & c^\top x \quad \text{über } x \in \mathbb{R}^n \\ \text{sodass} & Ax \leq b \\ \text{und} & x \geq 0. \end{array} \right\} \quad (6.2)$$

Dabei sind $c \in \mathbb{R}^n$ (**Kostenvektor**), $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$ mit $m \geq 0$. Die Ungleichungen sind komponentenweise zu verstehen. Ein LP der Gestalt (6.2) heißt in **kanonischer Form**, und x heißt **Variable** des Problems.

In (6.1) ist z. B.

$$c = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

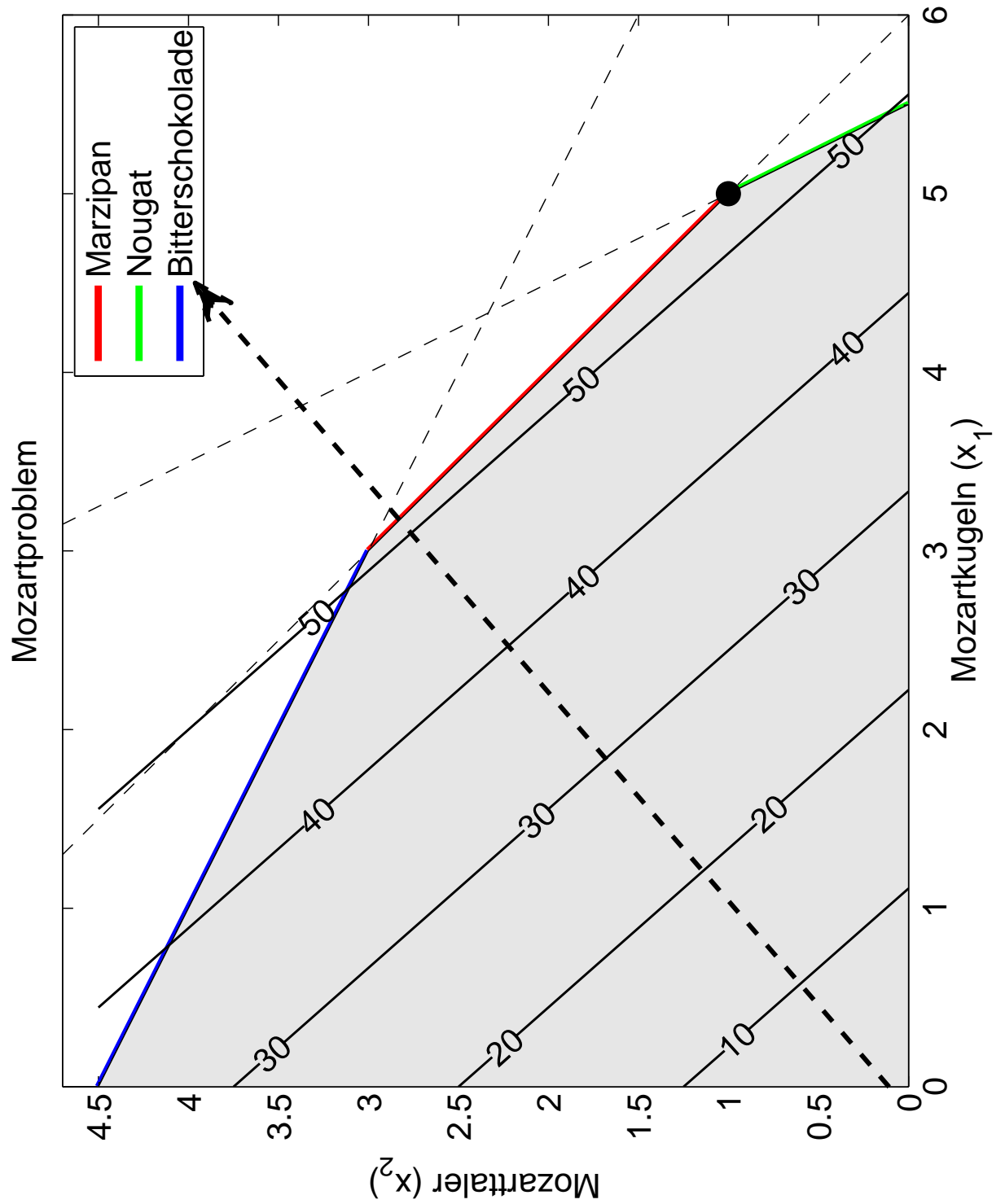


Figure 1: zulässige Menge (grau), Kostenvektor c , einige Höhenlinien (mit Funktionswerten) der Zielfunktion und optimale Lösung beim Mozartproblem