

Grundlagen der Optimierung

Beispiele Lagrange-dualer Optimierungsaufgaben

Beispiel (Lagrange-Dualität bei QP)

Betrachte das **quadratische Optimierungsproblem** (quadratisches Programm, QP, siehe [Definition 1.6](#))

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Minimiere} & f(x) = \frac{1}{2}x^\top Qx + c^\top x + \gamma \quad \text{über } x \in \Omega = \mathbb{R}^n \\ \text{sodass} & A_1 x \leq b_1 \\ \text{und} & A_2 x = b_2 \end{array} \right\} \quad (1)$$

mit einer symmetrischen positiv semidefiniten Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $A_1 \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $A_2 \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $b_1 \in \mathbb{R}^m$, $b_2 \in \mathbb{R}^p$.

Beachte: (1) ist eine konvexe Optimierungsaufgabe.

Die Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = \frac{1}{2}x^\top Qx + c^\top x + \gamma + \mu^\top (A_1 x - b_1) + \lambda^\top (A_2 x - b_2).$$

ist konvex bzgl. x . Notwendig und hinreichend für das $\inf_{x \in \mathbb{R}^n} \mathcal{L}(x, \lambda, \mu)$ ist $\nabla_x \mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = 0$, also

$$Qx + c + A_1^\top \mu + A_2^\top \lambda = 0. \quad (*)$$

Das heißt, es gilt

$$q(\lambda, \mu) = \mathcal{L}(x, \lambda, \mu) \quad \Leftrightarrow \quad (*) \text{ gilt.}$$

Die duale Aufgabe ist demnach gegeben durch

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Maximiere} & \mathcal{L}(x, \lambda, \mu) \\ \text{sodass} & Qx + c + A_1^\top \mu + A_2^\top \lambda = 0 \\ \text{und} & \mu \geq 0 \end{array} \right\} \quad \text{über } (x, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m \quad (2)$$

und ist damit wieder ein QP. Ist Q sogar s. p. d., so können wir (*) auflösen und x aus (2) eliminieren. \diamond

Beispiel (Minimum-Norm-Lösung eines linearen Gleichungssystems)

Wir betrachten

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Minimiere} & \|x\| \\ \text{sodass} & Ax = b \end{array} \right\} \quad \text{über } x \in \Omega = \mathbb{R}^n \quad (3)$$

mit der euklidischen Norm $\|\cdot\|$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Die Lagrange-Funktion ist

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = \|x\| + \lambda^\top (Ax - b).$$

Fall (I): Falls $\|A^\top \lambda\| > 1$, dann gibt es ein $z \in \mathbb{R}^n$ mit $\|z\| = 1$ und $z^\top A^\top \lambda > 1$. Wähle $x = -tz$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x, \lambda) &= t\|z\| - t\lambda^\top Az - \lambda^\top b \quad \text{für } t \geq 0 \\ &= t \underbrace{(\|z\| - \lambda^\top Az)}_{<0} - \lambda^\top b \\ &\rightarrow -\infty \quad \text{für } t \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Fall (II): Falls $\|A^\top \lambda\| \leq 1$, so gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x, \lambda) &= \|x\| + \lambda^\top Ax - \lambda^\top b \\ &\geq (1 - \|A^\top \lambda\|) \|x\| - \lambda^\top b \quad \text{Cauchy-Schwarz} \\ &\geq -\lambda^\top b,\end{aligned}$$

und dieser Wert wird für $x^* = 0$ angenommen.

Zusammen folgt:

$$q(\lambda) = \begin{cases} -\lambda^\top b, & \text{falls } \|A^\top \lambda\| \leq 1 \\ -\infty, & \text{falls } \|A^\top \lambda\| > 1. \end{cases}$$

[Wegen der Konvexität der Lagrange-Funktion bzgl. x hätten wir auch mit $0 \in \partial_x \mathcal{L}(x, \lambda)$ argumentieren können.]

Das zu (3) duale Problem ist also äquivalent zu:

$$\begin{aligned} &\text{Maximiere} && -\lambda^\top b && \text{über } \lambda \in \mathbb{R}^m \\ &\text{sodass} && \|A^\top \lambda\| \leq 1. \end{aligned} \tag{4}$$

Beachte: Das duale Problem hat eine diffbare Zielfunktion!

◇